ホモトピー論

幻想の世界から位相幾何学へ

A. T. Fomenko
D. B. Fuchs
V. L. Gutenmacher 著
三村　護 訳編



共立出版株式会社

ホモトピー論

幻想の世界から位相幾何学へ



ホモトピー論

幻想の世界から位相幾何学へ

A. T. Fomenko
D. B. Fuchs
V. L. Gutenmacher
著

三村　護 訳編

共立出版株式会社

Homotopic Topology

by

A.T. Fomenko
D.B. Fuchs
V.L. Gutenmacher

英語版への序文

本書は1960年代中期，国立モスクワ大学において行なわれた講義を基にして書かれたものである．これらの講義に先立って，数学において一般に重要であるいくつかの驚くべき発見がなされている．その中，最初のものは楕円型作用素の指数に関するAtiyah–Singerの定理である．この当時，位相幾何学は解析学や微分方程式のような分野の多くの良い数学者を惹きつけていた．それまでややもすれば時代遅れで，むしろ役に立たないと考えられていたこの分野に，彼らは復活した興味を抱いたのである．扱っている話題が位相幾何学のときには，講義室は一挙に超満員になったが，しかしながら，ここで講演者達自身も1950年代のホモトピー位相幾何学で育って来たものであるということを述べておくべきであろう．すなわち，彼らは代数的な研究法に強く影響を受けていたのである．異なる理由によるにもかかわらず，楕円型作用素の指数公式は，大半の聴衆と同様，講演者にも奇妙で遠い着想(アイディア)であった．彼らにとって球面のホモトピー群の計算は，位相幾何学(あるいは数学全体？)の主要問題であった．なぜであろうか？　現在振り返ってみても，この疑問に答えるのは難しいであろう．しかしながら，上述した講義にはこの計算は重荷であった．講演者の主たる目的は，初心者のために，基礎的な事項から「極致の高さ」——Adamsスペクトル系列——にまでトンネルを掘ることであり，このトンネルがいくつかの金礁をつらぬくのは単に幸運にすぎなかった．

本書は，読者に広範囲の話題，すなわち，特異ホモロジー論，障害理論，ファイバー束のスペクトル系列，Steenrod平方(作用素)を呈示している．これらのいくつかに単純に力点を置いていることに読者は混乱しないようわれわれは切望する．本書末尾のホモトピー群の膨大な計算は有益な演習の題材になるであろう．幾何学ともっと多く共通している位相幾何学の他の問題については，読者は他の書物を参照されたい．(例えば，文献に挙げられているMilnorの論文を推薦する．)

本書は，A. Fomenkoの挿絵により十分に説明されている．挿絵のないロシ

ア語の原著は想像しがたい——これらは原著の本質的な部分である．現在よく知られた数学者(であり，高名な画家)である Fomenko も本書が書かれた当時は若い学生であった．彼の挿絵は新鮮であり，かつ将来有望な主題に対する初心者の独創的な印象を表わしている．これらの挿絵は多くの読者に有益な指針を与えていると私は信じている．こういうものがなければ，しばらく前までは代数的位相幾何学が見なされていた「零と矢印の迷路」に読者はおそらく迷ってしまうであろう．

著者は本書を英訳した Károly Mályusz, およびこの出版に多大な貢献をした Aliz Fialowsky に感謝する．

D. Fuchs

目　　次

第 I 章　ホモトピー

§1. ホモトピーとホモトピー同値

集合 X は空でないとする．X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ が次の公理を満たすとき，集合 X の**位相**という：

[O₁] $X\in\mathcal{O}$，$\varnothing\in\mathcal{O}$

[O₂] $O_1, O_2, \cdots, O_k\in\mathcal{O} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} O_i\in\mathcal{O}$

[O₃] $\{O_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ が $\mathcal{O}$ の元からなる集合のとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\in\mathcal{O}$

このとき，$(X,\mathcal{O})$ を**位相空間**といい，$\mathcal{O}$ に属する集合を X の**開集合**という．

集合 X にはいろいろな位相を導入することができる．特に，各点 $x\in X$ が開かつ閉集合であるとき，この位相は**離散位相**とよばれる．

集合 X が2つの位相 $\{U_\alpha\}$, $\{V_\beta\}$ をもつ，すなわち，これら2つの集合族が位相の公理を満たすと仮定する．各点 $x\in X$ と各 $V_{\beta_0}\ni x$ に対して，$U_{\alpha_0}\subset V_{\beta_0}$ を満たす $U_{\alpha_0}\ni x$ をみつけることができるとき，$\{V_\beta\}\geq\{U_\alpha\}$（$\{V_\beta\}$ は $\{U_\alpha\}$ より強い）とする．2つの位相 $\{U_\alpha\}$, $\{V_\beta\}$ について，$\{U_\alpha\}\geq\{V_\beta\}$ かつ $\{U_\alpha\}\leq\{V_\beta\}$ が成り立つとき，2つの位相は一致するという．離散位相は集合 X 上のすべての位相のうちで最も弱いものである．

以下，位相空間を単に**空間**ということにし，空間の間の連続写像を単に**写像**ということにする．

位相空間のいくつかの基本的構成

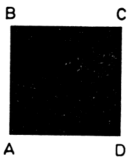
1. **積空間**　X と Y は空間，$M=X\times Y$ とする．M の部分集合は，それぞれ X と Y の開部分集合の対の積であるか，あるいは，そのような部分集合の任意個の和集合であるとき，開集合であると定義する．

★**演習**　これにより位相の公理が満たされることを証明せよ．

以下，$X\times Y$ にはこの位相を入れることにする．

2. **商空間**　R を空間 X 上の同値関係とする．このとき同値類の集合（X/R と表わす）を考え，自然な写像 $f:X\to X/R$ が連続であるような位相のうちで最も弱いもの（すなわち，X/R の部分集合が開集合であるための必要十分条件はこの部分集合の X における原像が開集合）を選ぶ．この位相は X/R の**商位相**とよばれる．X/R については，いつもこの特別な位相を考えるものとする．

例　X は正方形とし，次の同値関係 $R_i, i=1, \cdots, 5,$ を導入する．同値として



は，それぞれ

R_1：線分 AB と DC の点が同じ水平線（すなわち，AD に平行な直線）上にあるとき，

R_2：AB と CD の点が正方形の中心を通る同一直線上にあるとき，

R_3：AB と DC の点および BC と AD の点はそれぞれ R_1 に応じて同一視，

R_4：AB と CD の点は R_2 に，BC と AD の点は R_1 に応じて同一視，

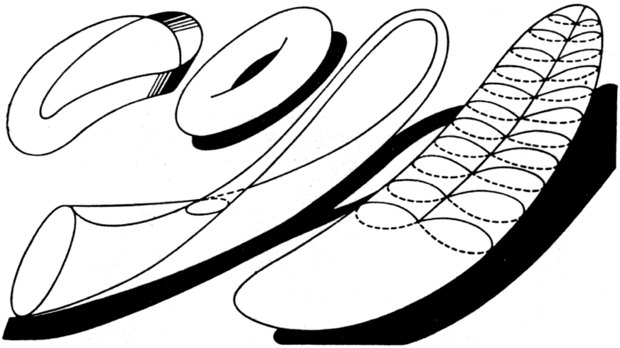
R_5：AB と CD の点および，CB と AD の点はそれぞれ R_2 に応じて同一視，

に関するものを考える．

明らかに，X/R_1 は円柱，X/R_2 は Möbius の帯，X/R_3 は2次元輪環面，X/R_4 は Klein の壺，X/R_5 は射影平面である．

3. **接着**　$A\subset X, B\subset Y$ は空間とその部分空間とし，f は A から B の上への写像とする．$X\cup Y$ 上に同値関係 R を次のように定義する：

各 $b\in B$ は，$f(a)=b$ を満たす任意の $a\in A$ と同値；

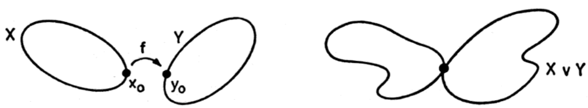


写像に関係しない点（すなわち，$(X\backslash A)\cup(Y\backslash B)$ の点）は同値でない．

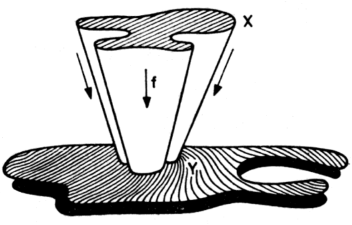
この商空間 $(X\cup Y)/R$ を $X\cup_f Y$ と表わし，f に沿って X を Y に**接着**して得られた空間という．

4. **一点和**　x_0 と y_0 はそれぞれ X と Y の点とし，$f: x_0\to y_0$ は点 x_0 から y_0 への写像とする．$X\cup_f Y$ を基点のある空間 X と Y の**ウェッジ**または**一点和**とよび，$X\vee Y$ と表わす．

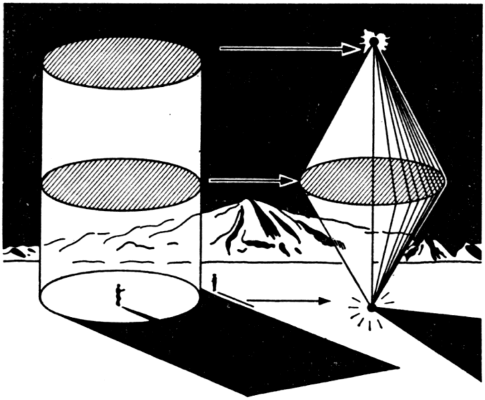
例えば，円 S^1 について，$S^1\vee S^1$ は 8 の字の形に似ている空間である．



5. **写像柱**　X と Y は空間，$f: X\to Y$ は連続写像とする．f は写像 $X\times(1)\to Y$ ともみなし，$X\times I\cup_f Y$ を得る．この空間は f の**写像柱**とよばれ，C_f と表わされる．



6. 懸垂　Xは空間とし，$X\times I$は区間$I=[0,1]$との積とする．上面$X\times 1$を1点に，下面$X\times 0$をもう1点につぶして得られた空間はXの**懸垂**とよばれ，ΣXと表わされる．



例　$S^n=\Sigma S^{n-1}$（S^nはn次元球面）

7. 写像空間　Map(X, Y)は空間Xから空間Yへのすべての連続写像の集合とする．Map(X, Y)は，次の位相を常にもつと仮定する．$\mathscr{C}$はXのすべてのコンパクト部分集合の族とし，$\mathscr{U}$はYのすべての開部分集合の族とする．$[C, U], C\in\mathscr{C}, U\in\mathscr{U}$，は$f(C)\subset U$を満たすすべての写像$f$から成り立つMap$(X, Y)$の部分集合とする．部分集合$[C, U]$をMap$(X, Y)$上の位相の基底としてとる．この位相は**コンパクト-開位相**とよばれる．

演習　X, Y, Zは3つの空間とする．X, YがHausdorff空間で，Xが局所コンパクトならば，Map$(X\times Z, Y)$とMap$(Z,$ Map$(X, Y))$は同相であることを示せ．

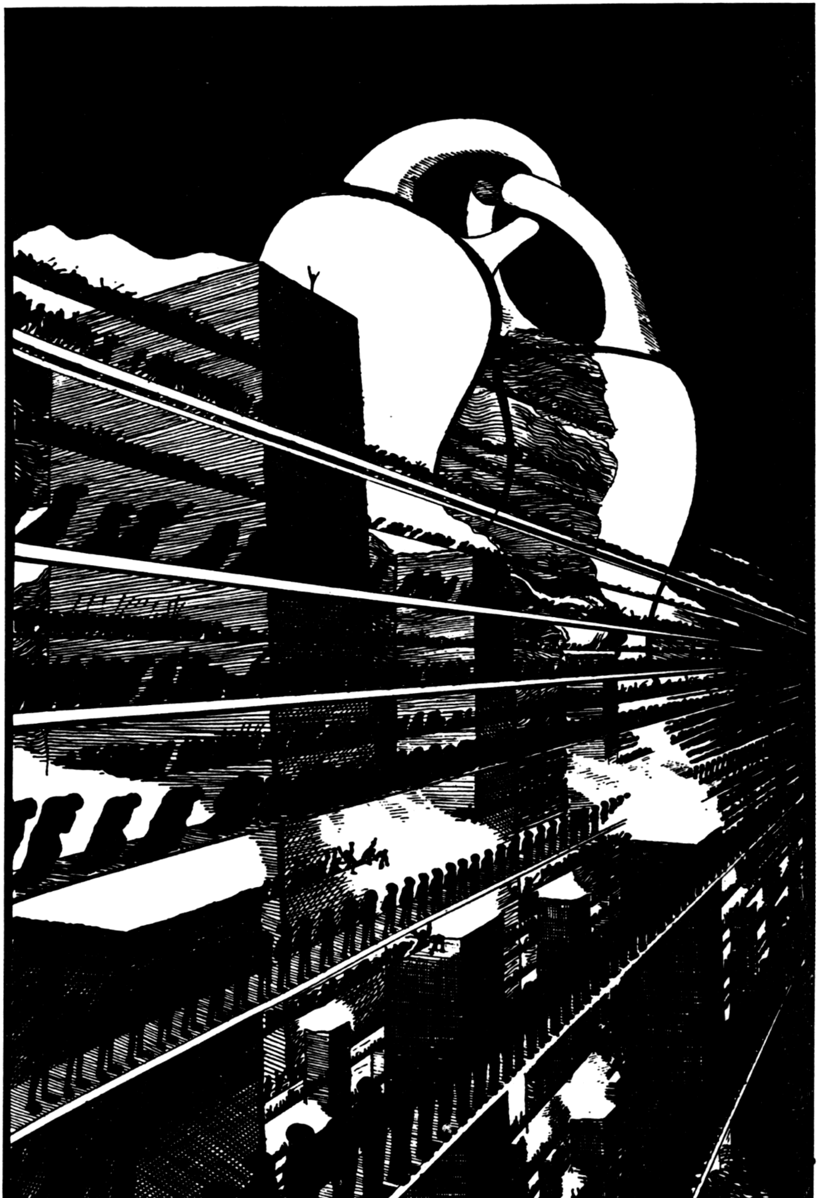
空間Map(X, Y)はY^Xと表わされるときもあるので，この公式は$Y^{X\times Z}=(Y^X)^Z$と書くことができ，したがって**指数法則**とよばれる．

例　(1) $Y=*$が1点ならば，Map(X, Y)は1点から成り立つ．

(2) $X=*$が1点ならば，Map$(X, Y)=Y$である．

$X=I=[0,1]$ならば，Map(I, Y)はYの**道の空間**とよばれる．

$y_0\in Y$は任意の固定した点とする．$f(0)=f(1)=y_0$を満たすすべての写像



$f: I\to Y$ から成る部分空間 $\Omega Y\subset \mathrm{Map}(I, Y)$ は Y の**ループ空間**とよばれる.

空間の任意の2点を道で結ぶことができるならば，**弧状連結空間**とよばれる.

ホモトピー

X と Y は空間，$f: X\to Y$, $g: X\to Y$ は2つの連続写像とする．写像の族 $\varphi_t: X\to Y$, $t\in I$, が存在して

1) $\varphi_0\equiv f$, $\varphi_1\equiv g$,

2) 写像 $\Phi: X\times I\to Y \Longleftrightarrow \Phi(x, t)=\varphi_t(x)$ は連続

を満たすとき，f と g は**ホモトープ**であるといい，$f\simeq g$ と書く.

連続写像 Φ は f と g の間の**ホモトピー**とよばれる．ホモトープの関係は同値関係である.

演習　これを証明せよ.

例　任意の空間 X から区間 $I=[0,1]$ へのすべての写像 $f: X\to I$ はホモトープである.

実際，任意の $f: X\to I$ に対して，写像 $\varphi_t=(1-t)f$ は f と零写像 $\varphi_1(x)\equiv 0$ の間のホモトピーである.

写像空間 $\mathrm{Map}(X, Y)$ において点 $f\in \mathrm{Map}(X, Y)$ を $g\in \mathrm{Map}(X, Y)$ に結ぶ道としてホモトピーを定義するもう1つの方法がある.

ホモトピーの関係は $\mathrm{Map}(X, Y)$ を同値類の集合に分ける．これを $[X, Y]$ と表わし，X から Y への**ホモトピー集合**とよぶ.

例　(1) $[X, I]=*$（これは1つの元から成る).

(2) $[*, Y]$ は Y の弧状連結成分の集合である.

X, X', Y は空間，$h: X\to X'$ は写像とする．$h^*: [X', Y]\to[X, Y]$ を次のように定義する：各類 $\alpha\in[X', Y]$ に対して，代表元 $a\in \mathrm{Map}(X', Y)$ を選び，α に対して，写像 $a\circ h\in \mathrm{Map}(X, Y)$（すなわち，合成 $X\xrightarrow{h}X'\xrightarrow{a}Y$）の類 $h^*(\alpha)$ を対応させる.

X, Y, Y' は空間，$h: Y\to Y'$ は写像とする．$h_*: [X, Y]\to[X, Y']$ を次のように定義する：$\alpha\in[X, Y]$ をとり，その中に任意の代表元 $a\in \mathrm{Map}(X, Y)$ を選ぶ．このとき，α に対して，$h\circ a\in \mathrm{Map}(X, Y')$ により表わされる類 $h_*(\alpha)$ を対応させる.

★演習　2つの定義は矛盾のないことを証明せよ．

ホモトピー同値

まず最初に，ホモトピー同値の3つの同値な定義を与える．

定義 1　空間 X_1 と X_2 は，写像 $f:X_1\to X_2$ と $g:X_2\to X_1$ が存在して合成写像 $g\circ f:X_1\to X_1$，$f\circ g:X_2\to X_2$ が恒等写像にホモトープであるとき，**ホモトピー同値**であるといい，$X_1\simeq X_2$ と表わす．

注意　$g\circ f$ と $f\circ g$ がそれぞれ恒等写像にホモトープであるばかりでなく等しいとき，f と g は**同相写像**であり，さらに互いに逆写像になっている．したがって，ホモトピー同値の概念は同相写像の概念の拡張である．

$$\begin{array}{ccc} [X_1, Y] & \xrightarrow{\varphi_Y} & [X_2, Y] \\ \downarrow h_* & & \downarrow h_* \\ [X_1, Y'] & \xrightarrow{\varphi_{Y'}} & [X_2, Y'] \end{array}$$

定義 2　任意の空間 Y に対して，一対一対応 $\varphi_Y:[X_1,Y]\to[X_2,Y]$ が存在して，各連続写像 $h:Y\to Y'$ について，右上の図は可換，すなわち，$\varphi_{Y'}\circ h_*=h_*\circ\varphi_Y$ のとき，$X_1\simeq X_2$ である．

$$\begin{array}{ccc} [Y, X_1] & \xrightarrow{\varphi^Y} & [Y, X_2] \\ \uparrow h^* & & \uparrow h^* \\ [Y', X_1] & \xrightarrow{\varphi^{Y'}} & [Y', X_2] \end{array}$$

定義 3　任意の空間 Y に対して，一対一対応 $\varphi^Y:[Y,X_1]\to[Y,X_2]$ が存在して，各連続写像 $h:Y\to Y'$ について，右の図が可換，すなわち，$\varphi^Y\circ h^*=h^*\circ\varphi^{Y'}$ のとき，$X_1\simeq X_2$ である．

定理　定義1, 2, 3は同値である．

証明　定義1と定義2の同値性をまず証明する．

定義2の意味で $X_1\simeq X_2$ であると仮定すれば，一対一対応 $\varphi_{X_2}:[X_1,X_2]\to[X_2,X_2]$ が存在する．$\bar f=\varphi_{X_2}^{-1}(\overline{\mathrm{id}\,X_2})$ と書き，$f\in\bar f$ を選ぶ（$\bar h$ は写像 h のホモトピー類を表わすという記号を使うことにする）．さらに，一対一対応 $\varphi_{X_1}:[X_1,X_1]\to[X_2,X_1]$ が存在する．$\bar g=\varphi_{X_1}(\overline{\mathrm{id}\,X_1})$ とおいて $g\in\bar g$ を選ぶ．f と g が定義1の条件，すなわち，$f\circ g\simeq\mathrm{id}\,X_2$ と $g\circ f\simeq\mathrm{id}\,X_1$ を満たすことを示そう．右の図は定義2により可換である．

$$\begin{array}{ccc} [X_1, X_2] & \xrightarrow{\varphi_{X_2}} & [X_2, X_2] \\ \uparrow f_* & & \uparrow f_* \\ [X_1, X_1] & \xrightarrow{\varphi_{X_1}} & [X_2, X_1] \end{array}$$

したがって $\varphi_{X_2}\circ f_*=f_*\circ\varphi_{X_1}$ である．この図の写像による元 $\mathrm{id}\,X_1$ の像を考える．f_* の定義により $f_*(\overline{\mathrm{id}\,X_1})=\overline{f\circ\mathrm{id}\,X_1}=\bar f$ である．

f の選び方から $\varphi_{X_2}(\bar{f})=\overline{\mathrm{id}\,X_2}$，したがって $\varphi_{X_2}\circ f_*(\overline{\mathrm{id}\,X_1})=\overline{\mathrm{id}\,X_2}$ である．一方，$f_*\circ\varphi_{X_1}(\overline{\mathrm{id}\,X_1})=\overline{f\circ g}$ である．この図は可換であるから，$\overline{\mathrm{id}\,X_2}=\overline{f\circ g}$，すなわち，$f\circ g\simeq\mathrm{id}\,X_2$ を得る．同様に，$g\circ f\simeq\mathrm{id}\,X_1$ が証明できる．これで定義2が定義1を意味することを示したことになる．

次に，写像 $f:X_1\to X_2$ と $g:X_2\to X_1$ が存在して，$f\circ g\simeq\mathrm{id}\,X_2$，$g\circ f\simeq\mathrm{id}\,X_1$ を満たすと仮定し，任意の空間 Y を考える．$\varphi_Y=g^*$ とおき，写像

$$\varphi_Y=g^*:[X_1, Y]\to[X_2, Y]$$
$$f^*:[X_2, Y]\to[X_1, Y]$$

を考える．g^* と f^* が互いに逆写像であることを示す．g^* と f^* の定義により，$g^*(\bar{a})=\overline{a\circ g}$，また $\overline{g\circ f}=\overline{\mathrm{id}\,X_1}$ であるから $f^*(g^*\bar{a})=f^*(\overline{a\circ g})=\overline{(a\circ g)\circ f}=\overline{a\circ(g\circ f)}=\bar{a}$．同様に，$g^*\circ f^*=\mathrm{id}$ であることも確かめることができる．これで φ_Y が逆写像をもつ，すなわち，φ_Y は一対一であることを確かめたことになる．

次に，φ_Y の2番目の性質を確かめる．Y' は空間，$h:Y\to Y'$ は写像とし，右の図を考える．これは可換である．実際，$\alpha=\bar{a}\in[X_1, Y]$ ならば，$h_*(\alpha)=\overline{h\circ a}$，

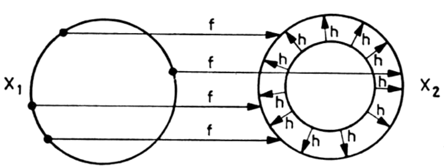
$$\begin{array}{ccc}
[X_1, Y] & \xrightarrow{\varphi_Y\equiv g^*} & [X_2, Y] \\
\downarrow h_* & & \downarrow h_* \\
[X_1, Y'] & \xrightarrow{\varphi_{Y'}\equiv g^*} & [X_2, Y']
\end{array}$$

$\varphi_{Y'}(\overline{h\circ a})=g^*(\overline{h\circ a})=\overline{(h\circ a)\circ g}$ であり，一方 $\varphi_Y(\alpha)=g^*(\alpha)=\overline{a\circ g}$ であるから，$h_*(\overline{a\circ g})=\overline{h\circ(a\circ g)}$．よって定義1から定義2が示された．

定義1と定義3の同値性も同様に証明できる．　　　　　　　　　　　（証明終）

ホモトピー同値が，実は通常の意味で同値関係であることを示すのは容易であろう．ホモトピー同値な空間の類が**ホモトピー型**である．

例　同じホモトピー型をもつ空間．X_1 は円，X_2 は円環とする．ここで $f:X_1\to X_2$ は埋込み，（h は半径に沿った縮少とし）$g\equiv f^{-1}\circ h:X_2\to X_1$ とすると，$f\circ g\simeq\mathrm{id}\,X_2$，$g\circ f\simeq\mathrm{id}\,X_1$ である．



明らかに，同相な空間はホモトピー同値である．この例でもわかるように，逆の命題は正しくない．

空間 X は，恒等写像が X を1点に写す写像 $X \to X$ にホモトープのとき**可縮**であるといわれる．

★演習 可縮な空間は一点から成る空間にホモトピー同値であることを証明せよ．

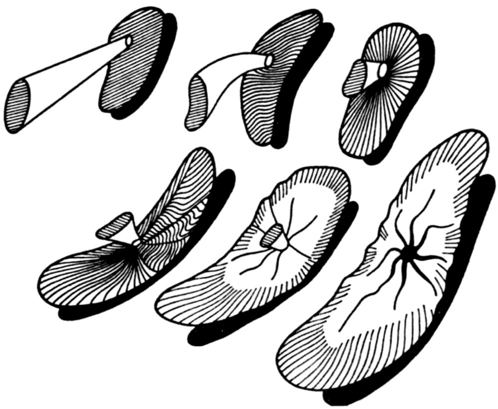
★演習 $f: X \to Y$ の写像柱は Y にホモトピー同値であることを証明せよ．

★演習 一対一な連続写像 $f: X_1 \to X_2$ と $g: X_2 \to X_1$ は存在するが，ホモトピー同値ではない2つの空間 X_1, X_2 を構成せよ．

部分空間 $X \subset Y$ は，包含写像 $X \subset Y$ と X 全体を y_0 に写す写像 $X \to Y$ が互いにホモトープであるとき，Y において点 y_0 に**可縮**であるといわれる．

X は任意の空間とする．X の **Lusternik-Schnirelmann カテゴリー** $\mathrm{cat}_1 X$ は，次の条件を満たす $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ における集合 I の最小濃度として定義される：

1. 各集合 X_i は閉集合である．
2. 各 $i \in I$ について，包含写像 $\varphi_{0i}: X_i \subset X$ と X_i を一点に写す写像 $\varphi_{1i}: X_i \to X$ はホモトープである．



なお，十分良い空間については，条件2は次のものに同値である：

2′. 各$i\in I$について，ホモトピー$\varphi_t^{(i)}: X\to X$が存在して，$\varphi_0^{(i)}=\mathrm{id}\,X$かつ$\varphi_1^{(i)}$は$X_i$を1点に写す．



条件2の代わりに，次の条件を用いてXの**強カテゴリー**$\mathrm{cat}_2\,X$の定義を得る：

2″. 各X_iは1点に可縮である．

演習 $\mathrm{cat}_1\,X$と$\mathrm{cat}_2\,X$はXのホモトピー不変量であることを証明せよ．

演習 Kは2次元球面の3点が同一視された空間とする．このとき，$\mathrm{cat}_1\,K=\mathrm{cat}_2\,K$が成立するか？

演習 n次元輪環面$T^n=S^1\times\cdots\times S^1$について$\mathrm{cat}_1\,T^n=\mathrm{cat}_2\,T^n=n+1$を示せ．

演習 n次元実射影空間$\boldsymbol{RP}^n$について$\mathrm{cat}_1\,\boldsymbol{RP}^n=\mathrm{cat}_2\,\boldsymbol{RP}^n$を求めよ．

相対的な場合

位相対(X,A)あるいは単に**対**とは，空間Xとその部分空間Aの組である．対(X,A)から対(X',A')への**写像**とは$f(A)\subset A'$を満たす写像$f: X\to X'$

である.

ホモトピー，ホモトピー同値写像，およびこれらに関する概念はすべて自然に対とそれらの間の写像の圏に拡張される.

演習　これを確かめよ.

$A=\{x_0\}$ の特別な場合，対 $(X, A)=(X, x_0)$ は**基点付きの空間**，x_0 は**基点**といわれる.

すべての写像 $(X, x_0)\to(X', x_0')$ から成る空間 $\mathrm{Map}((X, x_0), (X', x_0'))$ は $\mathrm{Map}_*(X, X')$ と表わされる.（この記号では，X と X' は基点付き空間を表わす.）同様な意味で記号 $[X, X']_*$ を用いる.（基点 $*$ を表わす）添字 $*$ は，各空間は基点をもち，基点を基点に写す写像のみが考えられていることを示す.

3対 (X, A, B) も考えることができる. このときは，$B\subset A\subset X$ ということであり，3対の間の**写像** $f:(X, A, B)\to(X', A', B')$ は $f(A)\subset A', f(B)\subset B'$ を満たす写像 $f: X\to X'$ である.

§2. 集合 $[X, Y]$ 上の自然な群構造

ホモトピー論においては，位相空間および連続写像に附随した離散集合に値をもつ不変量を研究する. 法則としては，空間がホモトピー同値または写像がホモトープならば，これらの不変量は一致する. このような不変量を構成するのに一般的な方法がある. すなわち，空間 Y を固定し，任意の空間 X に対して集合 $[X, Y]$（または $[Y, X]$）を対応させる. 多くの場合，空間 X よりもこの集合を研究する方が容易であり，$[X, Y]$（または $[Y, X]$）に関する情報から X に関する情報が得られる.

集合 $[X, Y]$ の1つの重要な性質にわれわれはすでに気がついている. もし $f: X'\to X''$ と $g: Y'\to Y''$ が空間の間の写像ならば，それらに対応して，写像

$$f^*: [X'', Y]\to[X', Y],\quad g_*: [X, Y']\to[X, Y'']$$

がある. 言いかえれば，$[\cdot, \cdot]$ は位相空間の圏から集合の圏への関手であり，これは最初の変数について反変，2番目の変数について共変である.

$[X, Y]$ の研究は，自然な群構造をもつときにはかなり容易になる. この概念を詳しく解説する前に，内容を表現する形式について合意しておこう. われ

われは2種類の不変量を研究する．すなわち，空間 Y を固定し，X に $[X, Y]$ または $[Y, X]$ を対応させる．いずれの場合にも定理を証明する．これらの理論はかなりの間並行——もっと正確には双対的——である．これは **Eckmann-Hilton 双対性**とよばれる．本書ではこれを詳説しないが，この節では，双対的な定義，命題，証明を視覚的に並行に表示して，この概念を強調することにしよう．本節では，空間は基点をもつ，すなわち，基点付きの空間を考えることにする．

基点 y_0 をもつ空間 Y を固定しよう．

各 X に対して集合 $[X, Y]_*$ は群構造をもつと仮定する．この構造は，任意の連続写像 $\varphi: X' \to X''$ に対して $\varphi^*: [X'', Y] \to [X', Y]$ が準同型であるとき，**自然**であるといわれる．

定義　Y が ***H*-空間*** とは次の条件を満たす2つの写像

$$\mu: Y \times Y \longrightarrow Y$$
$$\nu: Y \longrightarrow Y$$

が存在することである：

(i) 写像

$$Y \xrightarrow{j_1} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

と

$$Y \xrightarrow{j_2} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

(ただし $j_1(y) = (y, y_0)$，$j_2(y) = (y_0, y)$) はともに恒等写像 $\mathrm{id}\, Y: Y \to Y$ にホモトープ；

(ii) (ホモトピー結合性) 写像

$$Y \times Y \times Y \xrightarrow{\mathrm{id}\, Y \times \mu} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

と

$$Y \times Y \times Y \xrightarrow{\mu \times \mathrm{id}\, Y} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

各 X に対して集合 $[Y, X]_*$ は群構造をもつと仮定する．この構造は，任意の連続写像 $\varphi': X' \to X''$ に対して $\varphi'_*: [Y, X'] \to [Y, X'']$ が準同型であるとき，**自然**であるといわれる．

定義　Y が ***H'*-空間*** とは次の条件を満たす2つの写像

$$\mu: Y \longrightarrow Y \vee Y$$
$$\nu: Y \longrightarrow Y$$

が存在することである：

(i) 写像

$$Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\pi_1} Y$$

と

$$Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\pi_2} Y$$

(ただし $\pi_1(\pi_2)$ は第1 (第2) の Y では恒等写像，第2 (第1) の Y では零写像) はともに恒等写像 $\mathrm{id} Y: Y \to Y$ にホモトープ；

(ii) (ホモトピー双対結合性) 写像

$$Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\mathrm{id}\, Y \vee \mu} Y \vee Y \vee Y$$

と

*) 訳者註：それぞれ，*H*-群，*H'*-群ということが多い．

はホモトープ；

(iii) 写像

$$Y \xrightarrow{\mathrm{id}\, Y \times \nu} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

は（1点への）定値写像にホモトープ.

$$Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\mu \vee \mathrm{id}\, Y} Y \vee Y \vee Y$$

はホモトープ；

(iii) 写像

$$Y \xrightarrow{\mu} Y \vee Y \xrightarrow{\mathrm{id}\, Y \vee \nu} Y$$

は（1点への）定値写像にホモトープ.

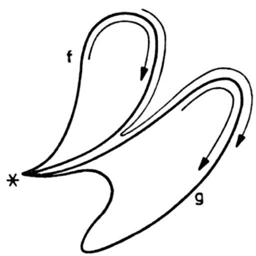
重要な例

H-空間の例. 任意の空間 Z のループ空間 $Y_0 = \Omega Z$ は *H*-空間である.

写像 $\mu : \Omega Z \times \Omega Z \to \Omega Z$ は, 式

$$\mu(f, s)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

で与えられる. すなわち, f と g に対して, まず f に沿って次に g に沿って動いて得られるループを対応させる.



写像 $\nu : \Omega Z \to \Omega Z$ は式

$$\nu(f)(t) = f(1-t)$$

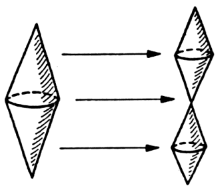
により得られる.

H-空間のもう1つの重要例は位相群である.

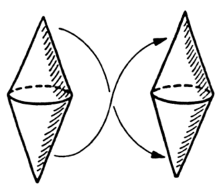
定理　集合 $[X, Y]_*$ が X に関して自然な群構造をもつための必要十分条

H'-空間の例. 任意の空間 Z 上の懸垂 $Y_0 = \Sigma Z$ は *H'*-空間である.

写像 $\mu : \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$ は次のように与えられる：



写像 $\nu : \Sigma X \to \Sigma X$ は次のように得られる：



ΣX の基点上の線分は1点に縮少する, すなわち, ΣX の基点であると仮定した方が便利がよい. （十分良い X に対しては）このように修正しても ΣX のホモトピー型は変わらない.

定理　集合 $[Y, X]_*$ が X に関して自然な群構造をもつための必要十分条

件は Y が H-空間となることである．

証明　**必要性** X に対して，$[X, Y]_*$ に X に関して自然な積があると仮定する．

$X=Y\times Y$ と選び，$Y\times Y$ の各因子への射影のホモトピー類 $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2\in[Y\times Y, Y]_*$ を考える．（$[Y\times Y, Y]_*$ における積を用いて）$\bar{\mu}=\bar{\alpha}_1\cdot\bar{\alpha}_2$ とおく．$\mu: Y\times Y\to Y$ は $\mu\in\bar{\mu}$ となる任意の写像とする．群 $[Y, Y]_*$ における恒等写像 $\mathrm{id}\,Y: Y\to Y$ のホモトピー類の逆元として与えられるホモトピー類 $\bar{\nu}\in[Y, Y]_*$ の代表元として $\nu: Y\to Y$ を定義する．

μ と ν の性質 (i)～(iii) は自動的に満たされる．例えば $\mu\circ j_1\simeq\mathrm{id}\,Y$ を確かめよう．写像 $j_1: Y\to Y\times Y$ は $j_1^*: [Y\times Y, Y]_*\to[Y, Y]_*$ を誘導し，α_1 を $\alpha_1\circ j_1$ の上へ，α_2 を $\alpha_2\circ j_1$ の上へ写す．今，$\alpha_1\circ j_1(y)=y$ かつ $\alpha_2\circ j_1(y)=*$ であるから，$\alpha_1\circ j_1=\mathrm{id}\,Y$ かつ $\alpha_2\circ j_1=*$ である（ただし，$*$ は定値写像）．X に関して自然であるから積は積に写り，したがって $j_1^*(\alpha_1\cdot\alpha_2)=\overline{\mathrm{id}\,Y}\cdot\overline{*}=\overline{\mathrm{id}\,Y}$，すなわち，$\mu\circ j_1\simeq\mathrm{id}\,Y$ である．（ここで定値写像，すなわち，全空間 Y を基点 y_0 に写す写像のホモトピー類は，群 $[Y, Y]_*$ の単位元であるという事実を用いている．これは，X として1点から成り立つ空間と写像 $Y\to X$ を考えることにより直ちに証明

件は Y が H'-空間となることである．

証明　**必要性** X に対して，$[Y, X]_*$ に X に関して自然な積があると仮定する．

$X=Y\vee Y$ と選び，Y の $Y\vee Y$ への埋込みのホモトピー類 $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2\in[Y, Y\vee Y]_*$ を考える．（$[Y, Y\vee Y]_*$ における積を用いて）$\bar{\mu}=\bar{\alpha}_1\cdot\bar{\alpha}_2$ とおく．$\mu: Y\to Y\vee Y$ は $\mu\in\bar{\mu}$ となる任意の写像とする．群 $[Y, Y]_*$ における恒等写像 $\mathrm{id}\,Y: Y\to Y$ のホモトピー類の逆元として与えられるホモトピー類 $\bar{\nu}\in[Y, Y]_*$ の代表元として $\nu: Y\to Y$ を定義する．

μ と ν の性質 (i)～(iii) は自動的に満たされる．例えば $\pi_1\circ\mu\simeq\mathrm{id}\,Y$ を確かめよう．写像 $\pi_1: Y\vee Y\to Y$ は $\pi_{1*}: [Y, Y\vee Y]_*\to[Y, Y]_*$ を誘導し，α_2 を $\pi_1\circ\alpha_2$ の上へ，α_1 を $\pi_1\circ\alpha_1$ の上へ写す．今，$\pi_1\circ\alpha_1(y)=y$ かつ $\pi_1\circ\alpha_2(y)=*$ であるから $\pi_1\circ\alpha_1=\mathrm{id}\,Y$ かつ $\pi_1\circ\alpha_2=*$ である（ただし，$*$ は定値写像）．X に関して自然であるから積は積に写り，したがって $\pi_{1*}(\alpha_1\cdot\alpha_2)=\overline{\mathrm{id}\,Y}\cdot\overline{*}=\overline{\mathrm{id}\,Y}$，すなわち，$\pi_1\circ\mu\simeq\mathrm{id}\,Y$ である．（ここで定値写像，すなわち，全空間 Y を基点 y_0 に写す写像のホモトピー類は，群 $[Y, Y]_*$ の単位元であるという事実を用いている．これは，X として1点から成り立つ空間と写像 $X\to Y$ を考えることにより直ちに証明

できる，すなわち，準同型 $[X, Y]_* \to [Y, Y]_*$ により群 $[X, Y]_*$ の単位元，すなわち，唯1つの元は $[Y, Y]_*$ の単位元に写る．)

十分性　Y は H-空間と仮定し，X は任意の空間とする．このとき，$\mu: Y \times Y \to Y$ は $\mu_*: [X, Y \times Y]_* \to [X, Y]_*$ を誘導する．これを自然な埋込み $\varphi: [X, Y]_* \times [X, Y]_* \xrightarrow{(=)} [X, Y \times Y]_*$ と合成し，得られた写像を μ_* と表わす．

同様に，$\nu: Y \to Y$ は $\nu_*: [X, Y] \to [X, Y]_*$ を誘導する．

容易にわかるように，積 μ_* と逆元 ν_* は $[X, Y]_*$ 上に X に関して自然な群構造を定義する．

★演習　$[X, \Omega\Omega Z]_*$ は可換群であることを証明せよ．

$n \geq 1$ とする．次の条件を満たす空間 K_n が存在する（§8参照）:

(1) $\pi_i(K_n) \cong \begin{cases} 0 & i \neq n \\ \boldsymbol{Z} & i = n \end{cases}$

(2) $K_{n-1} \simeq \Omega K_n$.

このとき，$[X, K_n]_*$ は群である．これは X の **n 次整係数コホモロジー群**といわれ，$H^n(X)$ と表わされる．

さらに（§12参照）

$$H^n(S^m) \cong \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \boldsymbol{Z} & n = 0,\ m \end{cases}$$

できる，すなわち，準同型 $[Y, X]_* \to [Y, Y]_*$ により群 $[Y, X]_*$ の単位元，すなわち，唯1つの元は $[Y, Y]_*$ の単位元に写る．)

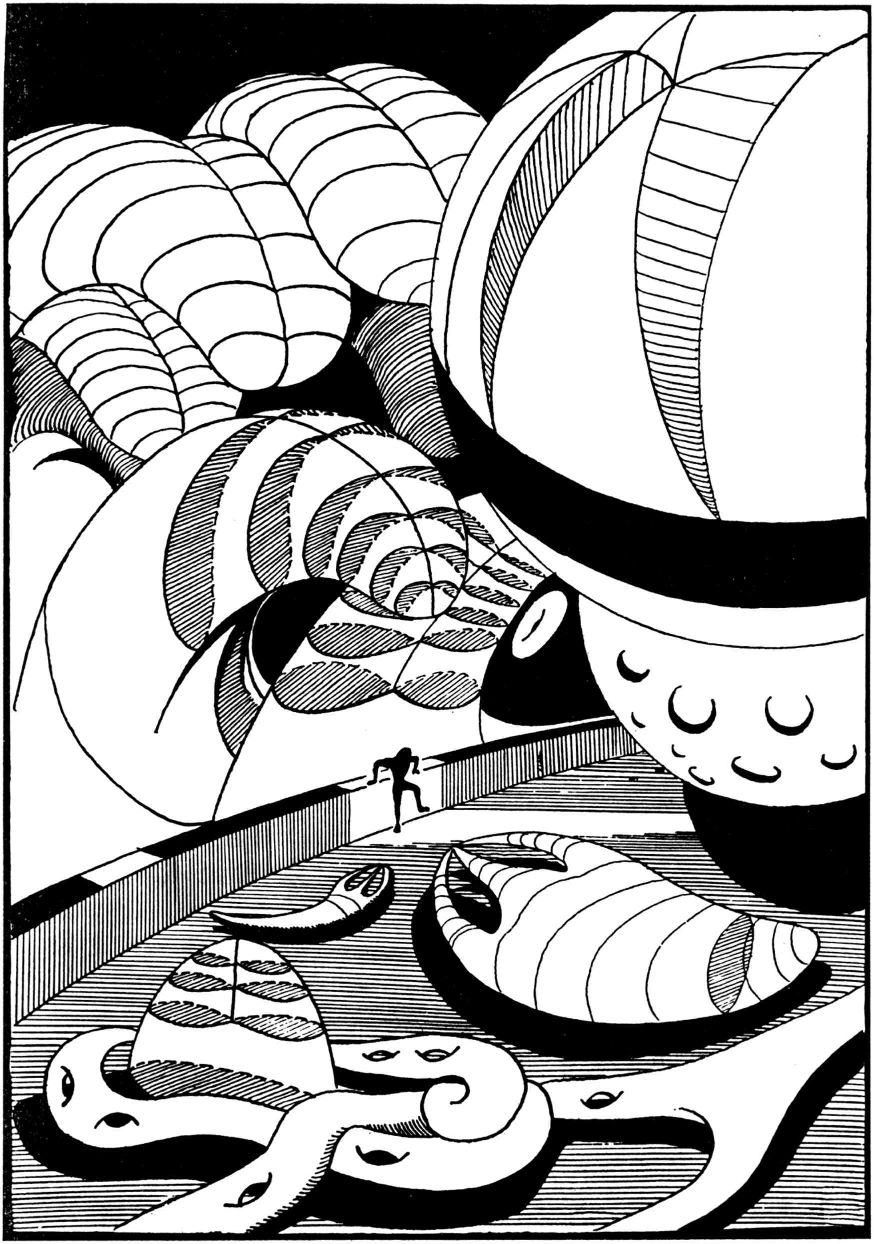
十分性　Y は H'-空間と仮定し，X は任意の空間とする．このとき，$\mu: Y \to Y \vee Y$ は $\mu^*: [Y \vee Y, X]_* \to [Y, X]_*$ を誘導する．これを自然な埋込み $\varphi: [Y, X]_* \times [Y, X]_* \xrightarrow{(=)} [Y \vee Y, X]_*$ と合成し，得られた写像を μ^* と表わす．

同様に，$\nu: Y \to Y$ は $\nu^*: [Y, X]_* \to [Y, X]_*$ を誘導する．

容易にわかるように，積 μ^* と逆元 ν^* は $[Y, X]_*$ 上に X に関して自然な群構造を定義する．

★演習　$[\Sigma\Sigma Z, X]_*$ は可換群であることを証明せよ．

$n \geq 1$ とする．n 次元球面 S^n は S^{n-1} 上の懸垂であるから $[S^n, X]_*$ は群である．これは X の **n 次ホモトピー群**とよばれ，$\pi_n(X)$ と表わされる．上の演習から，$n \geq 2$ ならば $\pi_n(X)$ は可換群である．



§3. CW 複　体

CW 複体とは，次の条件を満たす互いに素な(**胞体**という)集合 e_i^q の和集合 $K=\bigcup_{q=0}^{\infty}\bigcup_{i\in I_q} e_i^q$ として表わされる位相空間である．すなわち，e_i^q の**特性写像**といわれる連続写像の族 $f_i^q: D^q\to K$（ただし D^q は q 次元球体）が存在して，f_i^q の $\mathrm{Int}\,D^q$ への制限は同相 $\mathrm{Int}\,D^q\approx e_i^q$ であり，かつ $f_i^q(S^{q-1})$ は次元の低い胞体の和集合に含まれる：$f_i^q(S^{q-1})\subset\bigcup_{p=0}^{q-1}\bigcup_{i\in I_p} e_i^p$．さらに次の公理が満たされる：

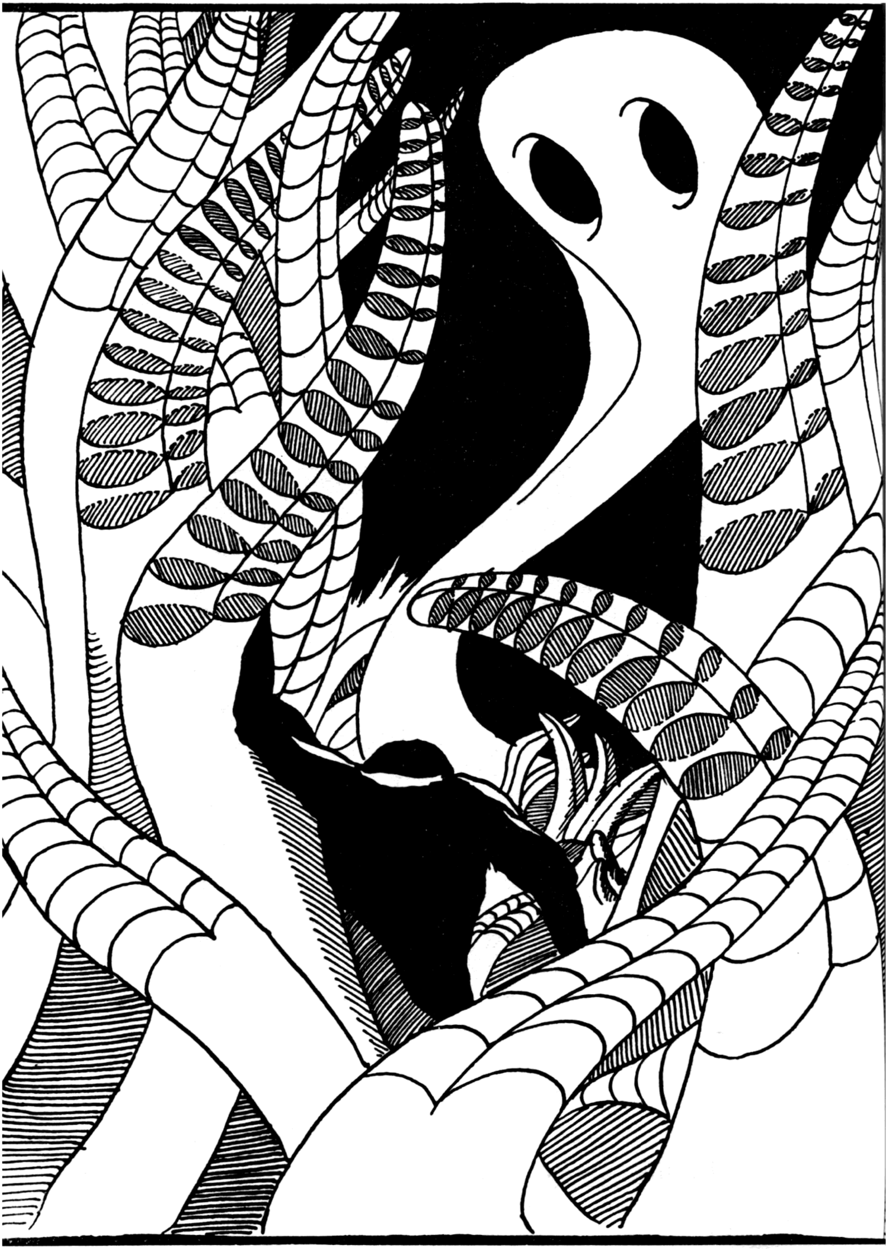
(C) 各胞体の閉包は有限個の胞体とのみ共通集合をもつ．

(W) 部分集合 $F\subset K$ が閉集合であるための必要十分条件は，各 e_i^q の特性写像 f_i^q について原像 $(f_i^q)^{-1}(F)\subset D^q$ が D^q において閉集合である．



CW 複体が**有限**であるとは，有限個の胞体から成り立っていることである．複体 K の**部分複体** L とは，閉部分集合として K に含まれる CW 複体 L であり，このとき L の胞体は K の胞体にもなっている．例えば，次元 $\leq n$ であるすべての胞体の和集合は K の部分複体であり，$\boldsymbol{n}$ **切片**といわれる．

複体が**局所有限**であるとは，各点が有限個の胞体の和集合に属する近傍をも



つことである．

演習　任意の胞体は有限部分複体に含まれることを証明せよ．

★**演習**　局所有限な CW 複体と任意の CW 複体との直積は CW 複体であることを証明せよ．その胞体は 2 つの CW 複体の胞体の積である．

演習　公理 (W) により与えられる位相は，特性写像が連続であるような位相のうち，最も弱いものであることを証明せよ．

★**演習**　CW 複体上で与えられた関数が連続であるための必要十分条件は各有限複体上で連続であることを証明せよ．

公理 (C) は公理 (W) を意味しない．実際，$S^\infty=\{(x_1, x_2, \cdots) \mid \sum x_i^2=1$ かつ十分大きい i について $x_i=0\}$ とし，S^∞ の位相は通常の距離 $\rho(\{x_i\}, \{y_i\})=\{\sum(x_i-y_i)^2\}^{1/2}$ により定義する．このとき位相空間 S^∞ は和集合 $\bigcup_{q=0}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{2} e_i^q$ として表わすことができる．ただし，ここで

$$e_1^q=\{x=(x_1, x_2, \cdots) \mid x_i=0, \quad i>q\ ;\ x_q>0\}$$

$$e_2^q=\{x=(x_1, x_2, \cdots) \mid x_i=0, \quad i>q\ ;\ x_q<0\}$$

である．これは，公理 (C) を満たすが，公理 (W) を満たさない胞体構造である．

演習　これを証明せよ．

空間が公理 (W) を除くすべての条件を満たす胞体への分割を許すならば，公理 (W) を適用して位相を弱めることにより，この空間を CW 複体にできることに注意する．

CW 複体の例

1. n 次元球面 S^n．これは 1 点 e^0 とその補集合 $e^n=S^n \backslash e^0$ の和集合 $e^0 \cup e^n$ として表わせる．胞体 e^n の特性写像 $f^n: D^n \to S^n$ は，球体 D^n の境界をこの点 e^0 に写し，D^n の内部を e^n の上へ同相に写す．

前出の例 S^∞ の場合と同様に，S^n 上にもう 1 つの胞体構造を定義できる．

2. n 次元実射影空間 $\boldsymbol{RP}^n$．$\boldsymbol{RP}^n$ に部分射影空間の列

$$*=\boldsymbol{RP}^0 \subset \boldsymbol{RP}^1 \subset \cdots \subset \boldsymbol{RP}^n$$

を選び，$e^0=\boldsymbol{RP}^0$，$e^1=\boldsymbol{RP}^1 \backslash \boldsymbol{RP}^0, \cdots, e^n=\boldsymbol{RP}^n \backslash \boldsymbol{RP}^{n-1}$ とおく．分割 $\boldsymbol{RP}^n=\bigcup_{q=0}^{n} e^q$ は，明らかに $\boldsymbol{RP}^n$ 上に CW 複体の構造を定義する．

3. n 次元複素射影空間 CP^n と n 次元四元数射影空間 HP^n. 同様に，n 次元複素射影空間 CP^n は次元 $0, 2, 4, \cdots, 2n$ に各 1 個の胞体をもつ CW 複体として表わすことができる．四元数体上の n 次元射影空間 HP^n は，次元 $0, 4, 8, \cdots, 4n$ に各 1 個の胞体をもつ同様な胞体構造をもつ.

★演習　次の空間を CW 複体として表わせ：

a）輪環面，　b）Klein の壺，　c）与えられた CW 複体上の懸垂

★演習　任意の有限 CW 複体は十分大きい次元のユークリッド空間に埋め込まれることを証明せよ.

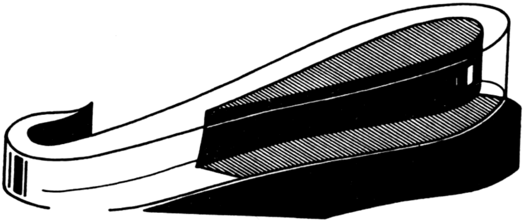
演習　球面のループ空間 $\mathrm{Map}_*(S^1, S^n) = \Omega S^n$ は CW 複体にホモトピー同値であることを証明せよ.



定義　位相対 (A, B) は，任意の X と $F: A \to X$ に対して，$f_0 = F|_B$ を満たす任意のホモトピー $f_t: B \to X$ が，$F_0 = F$ および $F_t|_B = f_t$ を満たすホモトピー $F_t: A \to X$ に拡張できるとき，**コファイバー空間**（または **Borsuk 対**）とよばれる.

定理 (Borsuk)　任意の CW 対 (K, L) ($\Longleftrightarrow K$ は CW 複体，L はその部分複体）はコファイバー空間である.

証明　対 $(K\times I, L\times I)$ を考える．写像 $\Phi : L\times I\to X$ ($\Leftrightarrow$ ホモトピー f_t)

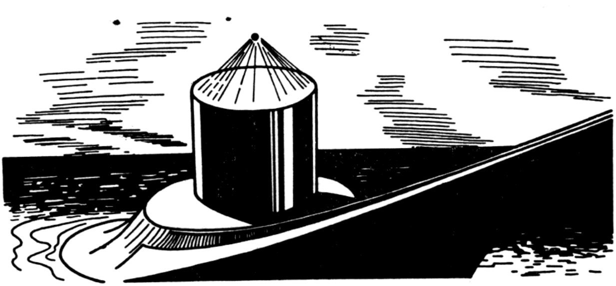


と $F : K\times 0\to X$ が与えられて $F|_{L\times 0}=\Phi|_{L\times 0}$ となっていると仮定する．ホモトピー f_t を F_t に拡張することは，写像 $F : K\times 0\to X$ を，$F'|_{L\times I}=\Phi$ を満たすような写像 $F' : K\times I\to X$ に拡張することと同値である．この構成は胞体の次元に関する帰納法で行なわれる．

$n=0$ とする．0 次元の胞体 e_i^0 については，

$$F'(a,t)=\begin{cases}F(a,0) & a=e_i^0\notin L\\ \Phi(a,t) & a\in L\end{cases}$$

とおく．今，K^n を K の n 切片として，F' は $L\times I$ から $K^n\times I$ に拡張されたと仮定する．任意の $(n+1)$ 次元胞体 $e^{n+1}\notin L$ をとる．胞体 e^{n+1} の境界 $\partial e^{n+1}=\overline{e^{n+1}}\setminus e^{n+1}$ は $f^{n+1}(\partial D^{n+1})$ と同じであり，CW 複体の定義により K^n に属しているから，F' は帰納法の仮定により $(\overline{e^{n+1}}\setminus e^{n+1})\times I$ で与えられている（ただし，f^{n+1} は e^{n+1} の特性写像である）．次に F' を「壁」$f^{n+1}(\partial D^{n+1})\times I$ と「底」$f^{n+1}(D^{n+1})$ から「柱」$f^{n+1}(D^{n+1})\times I$ の内部に拡張しよう．再び CW 複体の定義により，これは明らかに $\phi : (\partial D^{n+1}\times I)\cup(D^{n+1}\times\{0\})\to K$ を写像 $\phi' : D^{n+1}\times I\to K$ に拡張することと同値である．柱の外部で球体 $D^{n+1}\times\{1\}$ の近く



に1点をとれば，この点から柱を境界に射影する写像 $\eta: D^{n+1}\times I\to(\partial D^{n+1}\times I)\cup(D^{n+1}\times\{0\})$ は，境界上では恒等写像である．したがって，写像 ψ' を $\psi'(a,t)=\psi\circ\eta(a,t)$ により定義する．胞体 e_i^{n+1} は互いに交わらないから，写像はこのようにして $(n+1)$ 切片 K^{n+1} 全体で定義できる．（証明終）

系 1　K は CW 複体，L はその部分複体とする．L が可縮ならば $K/L\simeq K$ である．

証明　写像 $p: K\to K/L$ と $q: K/L\to K$ を構成し，

(1) $q\circ p\simeq \mathrm{id}\,K$,　　(2) $p\circ q\simeq \mathrm{id}\,(K/L)$

を示す．

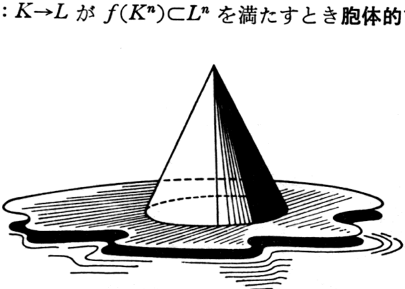
(1) 射影 $K\to K/L$ を p で表わす．L が可縮であるから，ホモトピー f_t が存在して，$f_0: L\to L\subset K$ は恒等写像，すなわち，$f_0=\mathrm{id}\,K|_L$ かつ $f_1|_L=*$ である．Borsuk の定理によりホモトピー $F_t: K\to K$ が存在して $F_0=\mathrm{id}\,K$ かつ $F_t|_L=f_t$ である．このとき $F_1(L)=*$．したがって，F_1 は K/L 上で与えられた写像と考えてよい．もっと正確には，ある写像 $q: K/L\to K$ があって $F_1=q\circ p$ と表わされる．したがって，$F_1\equiv F_0$，すなわち，$q\circ p\simeq \mathrm{id}\,K$ を得る．

(2) $p\circ q\simeq \mathrm{id}\,(K/L)$ を示す．上のように $p\circ F_t(L)=*$ は $p\circ F_t=q_t\circ p$ を意味する．ただし，$q_t: K/L\to K/L$ はホモトピーで，$q_0=\mathrm{id}\,(K/L)$，$q_1=p\circ q$ である．したがって，$p\circ q\simeq \mathrm{id}\,(K/L)$ を得る．（証明終）

系 2　(K,L) がコファイバー空間ならば，$K/L\simeq K\cup CL$ である．ただし，CL は L 上の錐である．

証明は読者に任せる．

定義　写像 $f: K\to L$ が $f(K^n)\subset L^n$ を満たすとき**胞体的**であるという．た



だし，L^n と K^n はそれぞれ L と K の n 切片である．

胞体近似定理

定理　$f: K \to L$ は CW 複体の間の写像とし，f は部分複体 $K_1 \subset K$ で胞体的であると仮定する．このとき，写像 $g: K \to L$ が存在して次を満たす：

(1) $f \simeq g$,　(2) $f|_{K_1} = g|_{K_1}$,　(3) g は K 上で胞体的,

(4) f と g を結ぶホモトピーは K_1 上で動かぬようにとれる．

この定理の証明において，単体複体の理論のいくつかの概念が必要になる．CW 複体の胞体の特性写像は，閉球体からと同時に単体 Δ^q からの写像と思ってよいことに注意する．

定義　CW 複体は次の 2 条件が満たされるとき**単体的**であるという：

(i) 各特性写像 $f_i^q: \Delta^q \to K$ は e_i^q 全体で同相写像である．

(ii) 任意の面 $\Delta^r \subset \Delta^q$ に対して，$f_i^q(\Delta^r)$ は K の胞体の 1 つの閉包と一致し，$f_i^q|_{\Delta^r}: \Delta^r \to K$ は，(Δ^r のアフィン変換を除いて) この胞体の特性写像と一致する．

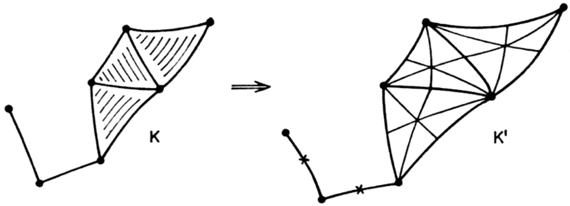
われわれは，r 次元標準単体と q 次元標準単体の r 次元の面は区別しないことにする．(これに伴う必要な修正は読者に任せる．)

単体複体の胞体の閉包はその単体である．0 次元胞体は**頂点**とよばれる．頂点の**星状体**とは，この頂点を含むすべての単体の和集合である．頂点 a の星状体は $\mathrm{St}(a)$ と表わす．

2 つの単体複体 K と L の間の**単体写像**とは，K の単体を L の (同じまたは低次元の) 単体の上に線型に写す連続写像である．特に，単体写像は頂点を頂点に写すから，2 つの単体写像は，K の頂点で一致すれば一致する．

単体複体 K' が K の**細分**であるとは，K と K' は位相空間として一致し，K の各単体は K' のある完全な単体の和集合となることである．(言いかえれば，K' は K の単体をもっと小さいものに分割して得られる．) 重要な例は**重心細分**である．これは，次のようにして得られる：K の $(q-1)$ 切片を分割した後，各 q 次元単体の中心を求め，この中心を頂点にもち，底辺は境界の重心細分の様々な単体の 1 つに一致させてピラミッド状に分割する．

演習　任意の有限CW 複体は単体複体にホモトピー同値であることを証明せよ．



★**演習**　任意の有限単体複体は十分大きな次元の単体の部分複体であることを証明せよ．特に，それは各単体上で線型であるようにユークリッド空間に埋め込むことができることを示せ．

★**演習**　上の演習のユークリッド空間の次元は $2n+1$ にできることを示せ．ただし，n は複体の次元である．

単体近似定理

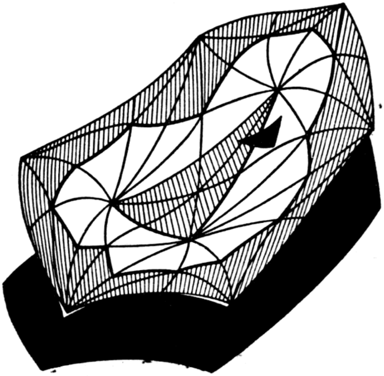
定理　$f:K\to L$ は有限単体複体の間の写像とする．このとき，K の細分 K' と f にホモトープな単体写像 $f':K'\to L$ が存在する．

注意　この単体近似定理は胞体近似定理の特別な場合ではない．

注意　f にホモトープなだけでなく，ある意味で近い写像を構成する単体近似はわれわれの考察において補助的役割を果たすだけなので，この性質についてはきちんとした取扱いはしない．これは位相幾何学のほとんどすべての教科書(例えば，田村一郎「トポロジー」，岩波書店)に見受けられる．

証明　複体 L と K はユークリッド空間に埋め込まれていると仮定しよう．

σ は L の任意の単体，L' はその最初の重心細分，v は1つの頂点とする．$v\notin\sigma$ ならば $\rho(\sigma,\mathrm{St}'(v))>0$ である．ただし ρ は距離，$'$ は重心細分における星状体を意味する．今の場合 $'$ は最初の細分 L' に属するものを意味する．L は有限複体であるから，$v\notin\sigma$ について $\min\rho(\sigma,\mathrm{St}'(v))=a>0$ である．さて，f は一様連続であるから，K の細分 K' が存在して，任意の $\sigma'\subset K'$ に対して $\mathrm{diam}\,f(\sigma')<a$ という性質をもつ．ここで，diam は考えている集合の直径を表わす．(K' としては，重複重心細分を選んでよい．) $\sigma'\subset K'$ と $\sigma\subset L$ について $f(\sigma')\cap\sigma\neq\emptyset$ とすると，任意の $v\notin\sigma$ に対して $f(\sigma')\cap\mathrm{St}'(v)=\emptyset$ である．次に，$v\in\sigma$ について $f(\sigma')\cap\mathrm{St}'(v)\neq\emptyset$ を満たす星状体 $\mathrm{St}'(v)$ を考え，σ' の頂点を w とする．もし，$f(w)\in\mathrm{St}'(v)$ ならば $f'(w)=v$ とおく．(もし，この



ような St′ (v) がいくつかあれば，$f'(w)$ はこれらの頂点のどれでもよい．）これで，K' の 0 次元切片で f' を定義したことになる．1 つの σ' の頂点は f' により 1 つの単体の頂点に写されるから，f' を単体写像 $K' \to L$ として「線型性」により拡張することは可能である．

次に，$f' \simeq f$ を示す．σ が L の単体のとき，$f(x) \in \sigma$ ならば $f'(x) \in \sigma$ も成り立つ．実際，成り立たないとすると，x を含む単体に属する K' の頂点が少なくとも 1 つ存在して，f による像は σ に含まれないある頂点の重心細分の星状体に属する．しかし，これは構成法に反する．最後に，f' と f を結ぶホモトピーを式

$$\varphi(x,t) = f(x) - [f(x) - f'(x)]t$$

により定義する．　(証明終)

胞体近似定理の証明

考えている写像は，部分複体 K' の胞体および K の次元 $<p$ のすべての胞体上ですでに胞体的になっていると仮定する．$e^p = e_i^p$ は K の p 次元胞体とする．公理 (C) により像 $f(e^p)$ は K の有限個の胞体とのみ共通集合をもつ．（実際，$f(\bar{e}^p)$ は，連続写像によるコンパクト集合の像であるので，コンパクトである．）これらの胞体の 1 つを考えよう．これが最高次元をもつと仮定し，この胞体を ε^q で表わす．このとき 2 つの可能性がある．

(1) e^p の像が ε^q 全体を満たさないとき；このとき，自由な点(補集合の点)を1つとり，この中心から出発して半径に沿って境界に向かって集合 $f(e^p)$ を引張る．(このとき胞体と開球体の間の同相写像を得る．) この変位は，$K'\cup K^p$ 上で与えられ，$e^p\cap f'(\varepsilon^q)$ の外側では定値であるホモトピーに拡張できる．Borsuk の定理によりこれは K 全体に拡張できる．

(2) $\varepsilon^q\subset f(e^p)$ である，すなわち，「自由な」点がないとき；この場合は次の方法を適用できる．e^p の部分では f の代わりに，像が ε^q を満たさない単体写像を用いる．(これでもし読者が証明の「すべて」をわかれば，この節の終りまで飛ばしてもかまわない．)

まず最初に，e^p と ε^q の内部を，対応する次元の開単位球体と同一視する．$D_r\subset\varepsilon^q$ は半径 r の同心の閉球体を表わすものとする．f は K の $(p-1)$ 切片で胞体的であるから，e^p において，$e^p\cap f^{-1}(D_{5/6})$ を含む有限単体複体 F をとることができる．F をより細かい単体に細分して，次の2条件

(i) α が（新しい細分で）F の単体で $f(\alpha)\cap D_{5/6}\neq\emptyset$ のときはいつでも，
$f(\alpha)\subset\varepsilon^q$,

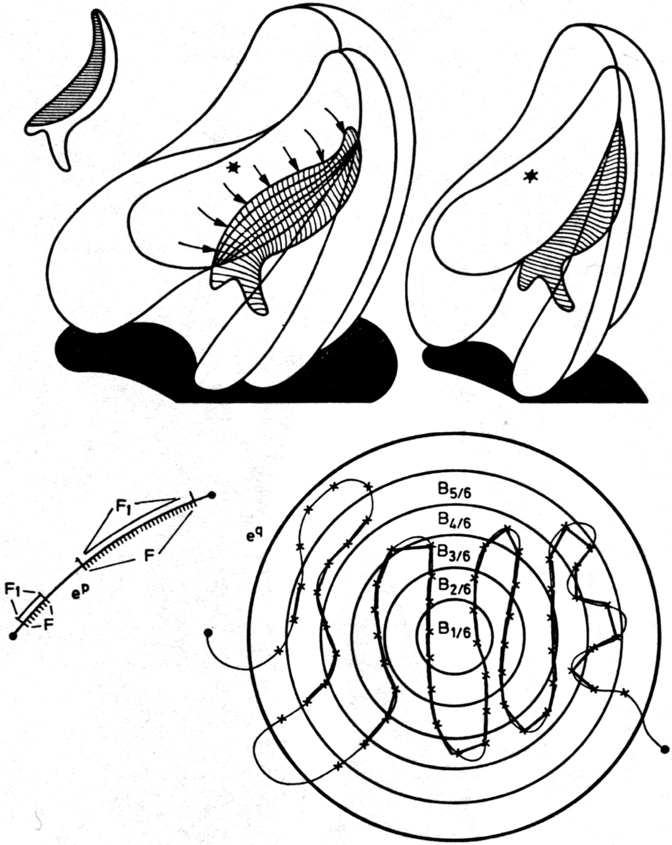
(ii) 任意の $f(\alpha)\subset\varepsilon^q$ に対して $\mathrm{diam}\, f(\alpha)<1/6$

を満たすようにする．(ε^q は単位球体であることを思いおこそう．) さて，F において，像が $D_{4/6}$ と交わるすべての単体を含む最小な部分複体 F_1 を考える．このとき，$D_{4/6}\cap f(e^p)\subset f(F_1)\subset D_{5/6}$ である．f と共に，F_1 の頂点では f と一致し，各単体上で線型であるもう1つの写像 $f_1: F_1\to D_{5/6}$ を考える．(再び，ε^q は単位球体であることを思いおこそう．) さて，$f=f_0$ と f_1 は，各点 $f_t(x)$ を対応する線分に沿って定速度で $f(x)$ から $f_1(x)$ に動かすホモトピー $f_t: F_1\to B_{5/6}$ で結ばれる．

写像 f と f_1 は次のように「縫い合わせ」られる．写像 $\bar{f}$ を

$$\bar{f}: K'\cup K^p\to L \Longleftrightarrow \bar{f}(x)=\begin{cases} f(x) & f(x)\notin D_{3/6}\ \text{または}\ x\notin e^p\ \text{のとき} \\ f_1(x) & f(x)\in D_{2/6}\ \text{または}\ x\in e^p\ \text{のとき} \\ f_{3-6\varphi(x)}(x) & \text{その他のとき} \end{cases}$$

により定義する．ここで $\varphi(x)$ は点 $f(x)$ と球体 ε^q の中心の間の距離である．(これは $f(x)\in\varepsilon^q$ のときのみ定義できる．) 明らかに $\bar{f}$ は連続で，f にホモトープであり，e^p の外側と $f^{-1}(\varepsilon^q)$ の外側で f と一致する．e^p の像は $D_{1/6}$ と有限個の p 次元平面でのみ交わり，ε^q を満たしはしない．Borsuk の定理により



縫い合わせる必要性はこの図からは明らかでない．これは $p>1$ のときに現われる．

f と $\bar{f}$ の間のホモトピーは K 全体に拡張することができる．このようにして，われわれは (ii) の場合を (i) の場合に帰着させたのである．

さて，上記の構成法を適用して帰納的に定理を証明する準備ができた．K が有限複体ならば，これ以上つけ加えることは何もない．無限複体の場合はさらに若干の精密さが要求される．詳しく議論する代わりに，この部分は読者に任せよう．



注意 もしKが同次元の胞体を無限個もっていれば，この構成法をこれらすべての胞体に同時に適用するのが最も良い．さらに，Kが任意に高い次元の胞体をもつときは，公理(W)を用いなければならない．



これで，胞体近似定理の証明が完了する．

胞体近似定理からのいくつかの結果

1. XとYはCW複体とし，Xは唯1つの頂点をもちq次元までの胞体はもたず，$\dim Y<q$と仮定する．このとき任意の写像$Y\to X$は定値写像（すなわち，Yを1点に写す写像）にホモトープである．

これは，上の定理から直ちにわかる．実際，$f: Y\to X$が胞体的ならば，fはYの$(q-1)$切片，すなわち，YをXの$(q-1)$切片，すなわち，唯1つの

頂点に写す．

特に $m<q$ のとき，$[S^m, S^q]=[S^m, S^q]_*=0$ である（すなわち，唯1つの元から成る）．

2. 空間 X は，$q\leq n$ について $[S^q, X]$ が唯1つの元をもつ（すなわち，すべての写像 $S^q\to X$ はホモトープである）とき，n **連結**といわれる．

★**演習**　次の条件は n 連結性に同値であることを証明せよ：

(a) $[S^q, X]_*$ は任意の $q\leq n$ について唯1つの元をもつ．

(b) $q\leq n$ のとき，任意の写像 $S^q\to X$ は写像 $D^{q+1}\to X$ に拡張できる．

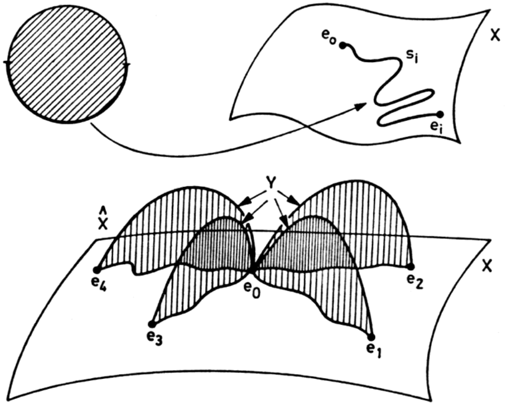
★**演習**　空間が0連結であるための必要十分条件は弧状連結であることを証明せよ．（S^0 は2点から成り立つことを思いおこす．）

「1連結」という用語は，「**単連結**」という言葉で使われる場合が多い．

定理　任意の n 連結な CW 複体 X は，唯1つの頂点をもち，$1\leq$次元$\leq n$ のそれ以外の胞体をもたない CW 複体にホモトピー同値である．

証明　仮定により，複体 X は弧状連結であるから，X の1つの頂点 e_0 を選び，道により残りの頂点と結ぶことができる．複体は n 連結であり，特に弧状連結であるから（道に交わるかもしれないが），これは可能である．胞体近似定理により，これらの道は X の1次元切片に属していると仮定してよい．e_0 を e_i に結ぶ道を s_i とし，X に2次元円板を道 s_i により下半円の写像に沿って接着する．この構成を各 s_i に行なうことにより，X および胞体 e_i^1（上半円）と e_i^2（接着した円板の内部）を含む新しい複体 $\hat{X}$ を得る．2次元胞体 e_i^2 の境界は，道 s_i についても同じことが成り立つから，1切片に属する．さて，各円板は下半円の上へ変位できるから，明らかに X は $\hat{X}$ の変位レトラクトである．次に胞体 e_i^1 の閉包の和集合を Y とする．明らかに Y は可縮であるから，$\hat{X}/Y\simeq\hat{X}\simeq X$ である．一方，Y は唯1つの頂点をもつだけである．

次の段階も同様である．$k<n$ とし，CW 複体 X' は $X'\simeq X$ かつ X' は唯1つの頂点をもち，次元 $1,\cdots,k-1$ の胞体はもたないと仮定する．この場合，X' の各 k 次元胞体は k 次元球面である．X と X' はともに n 連結であるから，この球面の X' への埋込みは $(k+1)$ 次元球体にも拡張することができ，その像は胞体近似定理により，順次 $(k+1)$ 切片に属するとみなしてよい．この写像に沿って球体 D^{k+2} を X' に接着する．したがって，1つの $(k+1)$ 次元胞体と1



つの $(k+2)$ 次元胞体を X' に付け加えることになる．このようにして得られた複体 $\hat{X}'$ は X' にホモトピー同値であり，すべての k 次元胞体を含む可縮な部分複体 Y（新しく付け加えられた $(k+1)$ 次元胞体の閉包の和集合）を含む．このとき $\hat{X}'/Y\simeq\hat{X}'\simeq X'\simeq X$ である．このようにして得られた CW 複体 $\hat{X}'/Y$ は唯 1 つの頂点をもち，次元 $1,\cdots,k$ の胞体をもたない．　（証明終）

系　X が k 連結な CW 複体であり，Y が k 次元 CW 複体ならば，$[Y,X]$ は唯 1 つの元から成る．また X と Y が頂点を基点にもつならば，これは $[Y,X]_*$ についても成り立つ．

演習　任意の 1 次元 CW 複体は円 S^1 の和集合にホモトピー同値であることを証明せよ．

§4. 基本群 $\pi_1(X)$

1 次元ホモトピー群 $\pi_1(X)$ は X の**基本群**ともよばれる．§2 において $\pi_n(X)$ について与えた定義は非常に一般的であったので，特別な $n=1$ の場合はもう一度述べよう．

定点 $x_0\in X$ を通るすべてのループ，すなわち，$\varphi(0)=\varphi(1)=x_0$ を満たす写像 $\varphi: I\to X$ を考えよう．2 つのループ φ と ψ は，ホモトピー $\varphi_t: I\to X$ があって $\varphi_0=\varphi$, $\varphi_1=\psi$ および $\varphi_t(0)=\varphi_t(1)=x_0$ $(0\leq t\leq 1)$ を満たすとき，**ホモトー**

プであるという．φ と ψ の**積ループ** χ は次式で定義される：

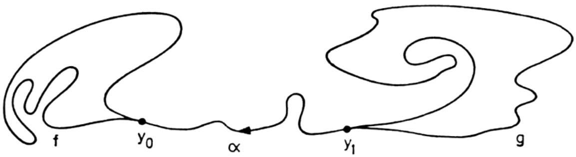
$$\chi(t)=\begin{cases}\varphi(2t) & 0\leq t\leq 1/2\\ \psi(2t-1) & 1/2\leq t\leq 1\end{cases}$$

言いかえれば，積ループはまず φ，次に ψ と，φ と ψ を続いて通って得られる．この積がホモトピーと両立することは容易に確かめられ，したがって，同時にループのホモトピー類の集合に積を与え，結果として，この集合は群になる．これを $\pi_1(X, x_0)$ と表わす．ループ $\varphi: I\to X$ を含むホモトピー類の逆元は明らかに $\varphi'(t)=\varphi(1-t)$ で定義されるループ $\varphi': I\to X$ のホモトピー類である．

任意の写像 $f: X\to Y$ は準同型 $f_*: \pi_1(X, x_0)\to\pi_1(Y, y_0)$，ただし $y_0=f(x_0)$，を誘導する．もし $f', f'': X\to Y$ が基点をもつ空間の間のホモトープな写像ならば，明らかに $f'_*=f''_*$ である．

定理 1　もし Y が弧状連結で，y_0, y_1 が任意の点の組ならば，同型 $\pi_1(Y, y_1)\cong\pi_1(Y, y_0)$ が成り立つ．

証明　Y は弧状連結であるから，道 $\alpha: I\to Y$ が存在して $\alpha(0)=y_0$ と $\alpha(1)=y_1$ を満たす．



写像 $\alpha_\sharp: \pi_1(Y, y_0)\to\pi_1(Y, y_1)$ を次のように構成する：$\bar{f}\in\pi_1(Y, y_0)$ とし，$\bar{f}$ の代表元を f とする．$\alpha_\sharp(f)=\alpha\cdot f\cdot\alpha^{-1}$ とおくと，y_1 に始点，終点をもつループを得る．f（と α）をホモトープな道で置き換えても $\alpha_\sharp(f)$ はホモトープなループに変わるだけで，したがって $\alpha_\sharp$ はホモトピー類の写像 $\pi_1(Y, y_0)\to\pi_1(Y, y_1)$ を定義する．逆写像 $\alpha_\sharp^{-1}$ は同様に $\bar{g}\in\pi_1(Y, y_1)$ の代表元 g に対して $\alpha_\sharp^{-1}(g)=\alpha^{-1}\cdot g\cdot\alpha$ により定義される．

$\alpha_\sharp$ が $\pi_1(Y, y_0)$ と $\pi_1(Y, y_1)$ の間の群同型であることをみるのは容易である．

（証明終）

この同型は道 α の選び方に依存している．α を α にホモトープでない別の β で置き換えると，通常異なる同型を得る．手短に言えば，上で構成した同型は

「標準的」ではない．しかし，α と β がホモトープでなくても $\alpha_\sharp$ と $\beta_\sharp$ が一致するかもしれないことを強調しておく．

演習　同型 $\alpha_\sharp$ がすべての α に対して一致するための必要十分条件は，$\pi_1(Y, y_0)$ が可換であることを証明せよ．

この定理によれば，Y が弧状連結のとき，群 $\pi_1(Y, y_0)$ は y_0 に独立であるとみなしてよい．したがって，$\pi_1(Y, y_0)$ の代わりに $\pi_1(Y)$ と表わして**基本群**ということにする．

★**演習**　ホモトピー同値な空間 Y_1 と Y_2 に対して，$\pi_1(Y_1)\cong\pi_1(Y_2)$ であることを示せ．

基本群の計算

定理 2　円 S^1 の基本群は整数の加法群に同型である：$\pi_1(S^1)\cong\boldsymbol{Z}$.

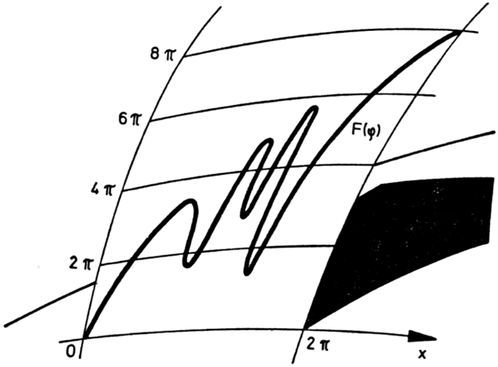
証明　円 S^1 上にいわゆる普遍被覆空間を構成しよう．(この概念は次節で詳しく解説する．読者は，次節の一般的構成の各段階において，この証明の対応する部分に戻ることを勧める．)

円 S^1 の各点は(2π の整数倍を除いて定義されている)実数によるパラメータをもっていると仮定し，基点は 0 とする．$\pi_1(S^1)$ の元は基点を保つ写像 $S^1\to S^1$ のホモトピー類であることを思いおこそう．任意のこのような写像は，区間 $[0, 2\pi]$ 上で定義され，各点での値は $2k\pi$ を除いて定まり，$f(0)=f(2\pi)$ を満たす連続な多価関数として与えられる．(ここでは連続な多価関数の概念は何を意味するのかとか，このような関数は一価の分枝——各点での値が f の値の 1 つと一致する $[0, 2\pi]$ 上で定義され連続な関数——をもつということを通常の ε-δ の手法でいかに証明するか，などという細部には立ち入らないことにする．) $f^\sharp$ は $f^\sharp(0)=0$ を満たす $[0, 2\pi]$ 上のこのような関数とする．これは f により一意的に定まり，さらに任意のホモトピー f_t $(0\leq t\leq 1)$ は，区間から直線への写像として関数のホモトピー $f_t^\sharp$ $(0\leq t\leq 1)$ を定義する．

逆に，$[0, 2\pi]$ で定義され，$F(0)=0$, $F(2\pi)=2k\pi$, k は整数，を満たす任意の連続関数 F は適当な f による $f^\sharp$ という形をしている．したがって，証明を完結するためには，次の非常に簡単な 3 つの注意をすればよい：

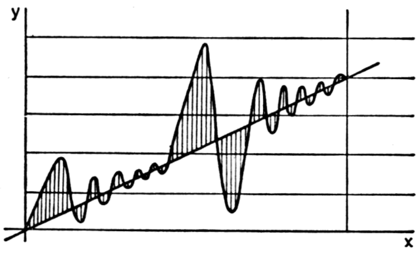
(1) ($f^\sharp(2\pi)=2k\pi$ における) 整数 k は，$f^\sharp(2\pi)$ の値域が離散的であるから，

ホモトピーの間は変わらない．したがって，f により表わされる $\pi_1(S^1)$ の元にのみ依存している．



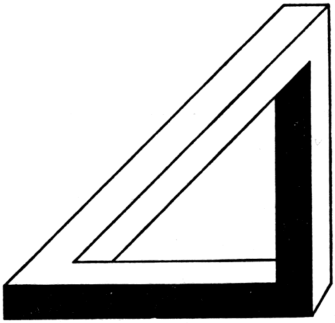
(2) 写像の任意の組 f_1, f_2 に対して $f_1^\sharp(2\pi)=f_2^\sharp(2\pi)$ ならば確かに $f_1\simeq f_2$ である．特に，もし $f^\sharp(2\pi)=2k\pi$ ならば $f\simeq h_k$．ただし，図で示すように，$h_k^\sharp(x)=2k\pi x$ である．

(3) $h_k\cdot h_l=h_{k+l}$ が成り立つ．　　　　（証明終）



定理 3　$B_A^1=\bigvee_{\alpha\in A} S_\alpha^1$ は円 S_α^1 の一点和とする．このとき，$\pi_1(B_A^1)$ は A の元に対応する生成元をもつ自由群である．

証明　証明は2段階に分けて行なう．第2段階は，実際は§5まで延期する．B_A^1 は（共通点を空間の基点と考えて）円 S_α^1 の一点和とする．円 S^1 の B_A^1 への（基点を保つと仮定して）α 番目の標準的埋込みを i_α, i_α の類を $\eta_\alpha\in\pi_1(B_A^1)$ で



表わす．このとき次の2つの事実を示す：

(1) $\pi_1(B_A^1)$ の任意の元は元 η_α と η_α^{-1} の有限積として表わされる．

(2) このような表現は隣接する因子の組 η_α と η_α^{-1} の簡約を除いて一意的である．

この2つの事実は合わせれば，定理に同値である．

さて，実際 (1) は単体近似定理から次のようにしてわかる．写像 $f: S^1 \to B_A^1$ を考えよう．空間 S^1 と B_A^1 は，明らかな方法で円 S^1 と S_α^1 をそれぞれ3つの1次元単体 P, Q, R と $P_\alpha, Q_\alpha, R_\alpha$ に分割して単体に分割される．単体近似定理により f は S^1 と B_A^1 の適当な細分の間の単体写像にホモトープである．(単体近似定理では基点の議論は考慮に入れていなかったので，これをもっと精密にすることは読者に任せる．実際，単体近似定理のもともとの証明における構成は自動的に基点を保つ単体写像を与える.) 次に，すべての単体 P_α, R_α を基点に写し，各単体 Q_α を全円周 S_α^1 に拡張する写像に恒等写像を結ぶ B_α^1 から B_α^1 へのホモトピーをこの写像に左から合成する．その結果，f にホモトープで次の構造をもつ写像 $\tilde{f}: S^1 \to B_\alpha^1$ が得られる．この円 S^1 はいくつかの円弧に分かれ，それぞれは基点に写されるか，一点和の円の1つの上に拡張されるかのいずれかである．基本群の積の定義により $\pi_1(B_\alpha^1)$ におけるこの写像の類は元 η_α と η_α^{-1} および(定値写像の類である)単位元の積である．

(2) を証明するためには，任意の積 $\eta_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} \cdots \eta_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$ は，元 η_α と η_α^{-1} を続けて含まないならば，単位元に等しくないことを示せば十分である．これは§5の主定理の系として得られるであろう．(証明終)

X は基点 x_0 をもつ空間，φ は S^1 の基点を $x_1 \in X$ に写す写像とする．x_0 と x_1 を結ぶ道 s が与えられているとき，ループ $s\varphi s^{-1}$ は $\pi_1(X, x_0)$ の1つの元 f を定義する．s をもう1つの道 s' で置き換えると f の代わりに gfg^{-1} を得る．ただし，g はループ $s's^{-1}$ の類である．このように，円の任意の写像は共役類を除いて基本群の元を定義する．

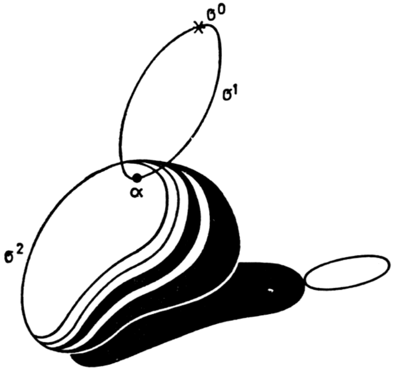
定理 4　K は1つの頂点 $*$，1次元胞体 $e_i^1\ (i \in I)$，2次元胞体 $e_j^2\ (j \in J)$ をもつ CW 複体とし，特性写像を $f_i^1 : D^1 \to K$, $f_j^2 : D^2 \to K$ とする．f_j^2 を $\partial D^2 = S^1$ に制限して得られる写像は，共役類を除いて元 $\beta_j \in \pi_1(K^1)$ を定める．このとき，$\pi_1(K)$ は生成元の集合 I により生成される群であり，関係式 $\beta_j = 1$, $j \in J$ をもつ（定理3参照）．

証明　唯1つの頂点 $*$,（特性写像 $f_i^1 : D^1 = I \to K$ をもつ）1次元胞体 $e_i^1\ (i \in I)$,（特性写像 $f_j^2 : D^2 \to K$ をもつ）2次元胞体 $e_j^2\ (j \in J)$ から成る CW 複体 K の基本群 $\pi_1(K) = \pi_1(K, *)$ を計算しよう．この群の各元は基点を保つ写像 $\varphi : S^1 \to K$ により表わされる．円 S^1 を1つの0次元胞体と1つの1次元胞体をもつ CW 複体とみなすならば，φ は0切片上ではすでに胞体的であり，したがって，0切片で定値である胞体写像にホモトープである．言いかえれば，$\pi_1(K)$ の各元はある写像 $\varphi : S^1 \to K^1 \subset K$ により表わされる．胞体 e_i^1 の特性写像 f_i^1 はある元 $\Theta_i^1 \in \pi_1(K)$ を表わし，定理3により $\pi_1(K)$ の任意の元は積 $\Theta_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots \Theta_{i_k}^{\varepsilon_k}\ (\varepsilon_s = \pm 1)$ と書ける．

最後に，1に等しい積をみつけなければならない．$j \in J$ について $g_j : S^1 \to K^1 \subset K$ は特性写像 f_j^2 の $\partial D^2 = S^1$ への制限とする．定理4の前の議論により，これは共役類を除いて $\pi_1(K^1)$ の元を定義し，明らかにその像は（g_j が円板 D^2 の写像に拡張されるので）$\pi_1(K)$ の単位元である．さらに，このような元の共役元は，それらの積はもちろんのこと，単位元に等しくなる．

注意　考えているすべての写像は基点を基点に写すと仮定したかのようにみえるかもしれない．しかし，これは任意の CW 複体について正しいとは限らないし，そう仮定しても証明はやさしくはならないであろう．

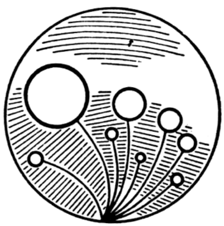
$\Theta \in \pi_1(K^1)$ は射入 $K^1 \subset K$ の誘導する準同型により単位元に写される元，すなわち，Θ の任意の代表元 $f : S^1 \to K^1 \subset K$ は写像 $F : D^2 \to K$ に拡張されると



する．胞体近似定理により F の像は K^2 に入っていると仮定してよい．胞体近似定理の証明と同様な方法で，K の各 2 次元胞体の中心の廻りの小さい円板の原像上で F は単体的であるとしてよい．これらの円板を（それぞれ単体写像により）さらに小さくして，開 2 次元単体の点の像のみを含むようにする．

さて，われわれは次の状況にある：各 2 次元胞体は中心に小さな円板を含み，その原像は，D^2 に属しかつ対応する円板の上に線型に写される同様な円板から成り立っている．（向き付けについては何も仮定していない！）

次に，複体 K をそれ自身に変位して，1 切片は固定し，各胞体において円板は全胞体を覆うように拡張し，その補集合は 1 切片に押しつぶすようにする．Borsuk の定理によりこの変位は変位 $K \to K$ に拡張され，$\tilde{F}$ はこの変位と F の



合成として定義する．このとき，$\tilde{F}$ は次の性質をもつ：D^2 においていくつかの円板の補集合は，1 切片の上へ写され，また円板そのものは対応する 2 次元

胞体の上へ写される．これらの写像のそれぞれは特性写像と一致するか，あるいは軸反転だけ異なるかのどちらかである．

さて，各円板を線により S^1 の基点と結ぶ．これらの円板とこの線の和集合の補集合は $\tilde{F}$ により K^1 の上へ写される開円板である．この円板の境界もまた K^1 の上へ写され，$\pi_1(K)$ のある元を表わすが，円板からの写像の制限であるから，$\pi_1(K)$ の単位元を表わす．一方，この元は（D^2 の境界により表わされる）元 Θ と2次元胞体の特性写像により表わされる元に共役となる元との積に等しい．したがって，Θ はこのような元の積に等しい．（証明終）

★**演習**　可縮な空間は単連結であることを証明せよ．

演習　H-空間の基本群は可換であることを証明せよ．

演習　2次元球面 S^2 上で連続な2つの奇関数（$\Leftrightarrow$ τ を S^2 の対心写像とするとき，$x \in S^2$ に対して $f(x) = -f(\tau x)$ を満たす関数 f）は共通の零点をもつことを証明せよ．

演習　**結び目**とは，3次元空間においてそれ自身と交わっていない多角形の閉じた線である．図に示されるように3次元空間の最も簡単な結び目が**三葉結び目**である．この補集合の基本群を求めよ．このことから三葉結び目は「ほどけない」，すなわち，空間 $\boldsymbol{R}^3$ からそれ自身への同相写像で三葉結び目を標準的な円に変換するものはないことを導き出せ．また，任意の群はある結び目の補集合の基本群に同型になりうるか？

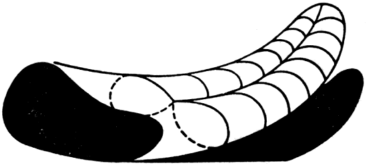


よく知られているように，すべての2次元閉多様体は球面にハンドル（向き付け可能な曲面）と Möbius の帯を接着して得られる（J. ミルナー：モース理論（志賀浩二訳），吉岡書店，参照）．例えば，輪環面は1つのハンドルをもつ球面である．Möbius の帯の接着は自己交叉を起こさずに3次元空間の内部で行なうことはできない．これをよく見えるようにするために，Möbius の帯の境界は通常の円にすぎないことを思いおこそう．そうすれば，Möbius の帯の境界に沿って穴のあいた球面を接着することができる．



演習 3つの Möbius の帯を接着することは，1つの Möbius の帯と1つのハンドルを接着することと同じであることを証明せよ．

★**演習** 任意の2次元曲面の基本群を計算せよ．特に球面，輪環面，射影平面，Klein の壺の基本群を求めよ．これらの曲面のうち，どれが可換な基本群をもつか？



演習 いかなる3次元閉多様体の基本群にもなりえない群が存在することを証明せよ．

以下，G は有限個の生成元と関係式をもつ任意の群とする．

演習 基本群が G である閉多様体を構成せよ．

この問題は，次元に（可能な限り）最も強い条件を付加えるともっと難しくなる．

演習 基本群が G である4次元閉多様体を構成せよ．

§5. 被覆空間

2つの弧状連結空間 T と X について，T が X 上の**被覆空間**であるというのは，写像 $\pi: T\to X$ が与えられ，各 $x\in X$ についてその開近傍 $U=U(x)\subset X$ が存在して $\pi^{-1}(U)$ は $U\times D$ に同相（ただし D は離散集合）であり，かつ図式

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \approx & U\times D \quad (\text{同相}) \\ & \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \text{射影}} & \\ & U & \end{array}$$

が可換となるときである．写像 $\pi: T\to X$ は**被覆射影**または単に**被覆**といわれる．

例　次の例の π はいずれも被覆である：

(1) $T=\boldsymbol{R}$ は実直線，$X=S^1=\{z\in\boldsymbol{C}\,|\,|z|=1\}$ は円，射影 $\pi:\boldsymbol{R}\to S^1 \Longleftrightarrow \pi(t)=e^{2\pi it}$ で与える．

(2) $\pi: S^1\to S^1 \Longleftrightarrow \pi(z)=z^k$ で与える．ただし，$k\neq 0$ は整数である．

(3) $T=S^n$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ における n 次元単位球面，$X=\boldsymbol{R}P^n$ は n 次元実射影空間とする．写像 $\pi: S^n\to\boldsymbol{R}P^n$ は，S^n の任意の点にこの点と球面の中心を結ぶ直線を対応させる写像である．

(4) $T=\boldsymbol{R}^2$ は平面，$X=S^1\times S^1$ は輪環面，$\pi: T=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to X=(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R})/(\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z})$ は商群の上への自然な射影である．

被覆ホモトピー定理

定理 1　$\pi: T\to X$ は被覆とする．任意の空間 Z に対して，写像 $f: Z\to T$ とホモトピー $\Phi: Z\times I\to X$ で $\pi\circ f=\Phi|_{Z\times\{0\}}$ を満たすものが与えられたとき，一意的にホモトピー $F: Z\times I\to T$ が存在して，$F|_{Z\times\{0\}}=f$ かつ $\pi\circ F=\Phi$ となる．

補題　$\pi: T\to X$ は被覆とする．$x\in X$, $t\in\pi^{-1}(x)$ とし，$f: I\to X$ は $f(0)=x$ となる道とするとき，一意的に道 $g: I\to T$ が存在して $g(0)=t$ かつ $\pi\circ g=f$ となる．

補題の証明　被覆の定義で要求される性質をもつ近傍 $U(x)$ を初等的とよぶことにすると，各点 $f(t)\in X$ に対して初等的近傍が存在する．道はコンパクト集合の連続写像による像であるからコンパクトであり，これらの族は道を被



覆する有限個の部分族を含む．ある近傍が，もう1つの近傍に属するどんな点のパラメータより小さいパラメータをもつ道の点を1つ含むとき，最初の近傍はこのもう1つの近傍より先にある，というようにこれらの近傍を便宜上並べることにする．そこで一番最初の近傍を考えよう．π によるその原像は同様な近傍の離散和集合に同相である．これらのうちで，点 t を含むのは1つだけである．この近傍において，道 f の原像を考える．これが，道の $U(f(0))$ に含まれる部分を T に「リフト」する唯一の方法である．

さて，2番目の近傍は明らかに1番目のものと交わる．したがって，これはすでにリフトされているある点 $f(t)$ を含み，上の状況が繰り返されることがわかる．この操作は有限回であり，各段階でリフトは一意的であるから，このリフトされた道は一意的である．　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

定理1の証明　$z\in Z$ とする．このとき $\varphi|_{z\times I}:I\to X$ は X における道を定義する．写像 φ は $t\in I$ について連続であり，したがって，この道は T において一意的な「リフト」をもつ．ただし，道の始点は f により与えられる．z を Z のなかで動かして写像 $F:Z\times I\to T$ を得る．この写像が一意的で連続であることは容易にわかるであろう．　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

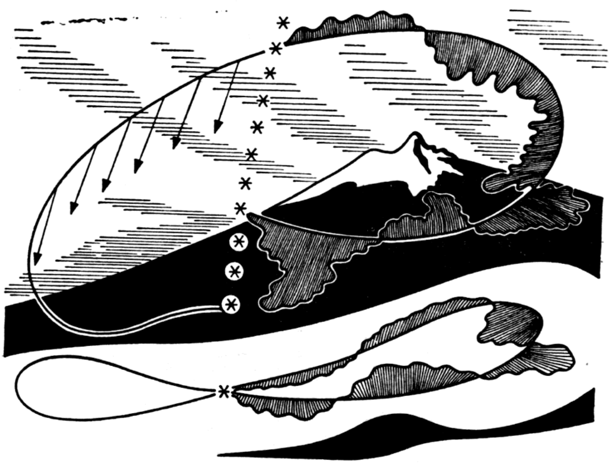
定理2　準同型 $\pi_*:\pi_1(T)\to\pi_1(X)$ は単射である．ただし，$\pi_1(X)$ は $\pi_1(X, x_0)$ を表わし，x_0 は X の任意の固定した点である．

証明　T のループ α が零ホモトープなループ $\pi(\alpha)$ に射影されると仮定するとき，このループも零ホモトープであることを示せばよい．さて，ループ α とは写像 $F:S^1\to T$ である．仮定により $\pi\circ F=f_0:S^1\to X$ は零ホモトープ，すなわち，ホモトピー $f_t:S^1\to X$ が存在して $f_1(S^1)=*$ となる．ホモトピー被覆定理により，ホモトピー $F_t:S^1\to T$ が存在して，$\pi\circ F_t=f_t$ かつ $F_0=F$ となる．点 $*$ の原像は T の離散部分集合であるから，F_1 は1点の上への写像である．したがって，ループ α も1点へ可縮である．　　　　　　　　(証明終)

定理3　任意の点 $*\in X$ の原像 $\pi^{-1}(*)=D$ は部分群 $\pi_*(\pi_1(T))$ による $\pi_1(X)$ の剰余類と一対一に対応する．

証明　(実は，以下の証明には定理というより多くの構成があり，いわば定義と定理の間のようなものである．)　定理のいう対応は次のようにして定められる．X のループを考えると，これは T にリフトできる．このループに，T

で対応する道の終点を対応させる．(始点は $*$ と一致するが，終点は $\pi^{-1}(*)$ に属することがわかっているだけである.)このとき，次の事実を確かめる必要が



ある：

(i) この定義に矛盾がない，すなわち，もし2つのループが $\pi_1(X)/\pi_*\pi_1(T)$ の同じ類に属すならば，それらに同じ点が対応している．

(ii) 2つのループが $\pi_1(X)/\pi_*\pi_1(T)$ の異なる類に属すならば，それらには異なる点が対応する．

(iii) $\pi^{-1}(*)$ の各点はあるループに対応している．

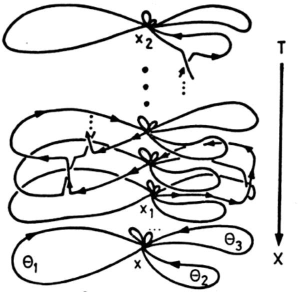
(i) の証明；$\alpha, \beta \in \pi_1(X)/\pi_*\pi_1(T)$ とする．このとき，$\pi_*^{-1}(\beta^{-1}\alpha)$ は T のループである．すなわち，道 $\pi_*^{-1}(\beta)$ は $\pi_*^{-1}(\alpha)$ の終点から出発し，したがって，$\pi_*^{-1}(\beta)$ は，求められているように，$\pi_*^{-1}(\alpha)$ と同じ点で終わる．

(ii) の証明；実際，α と β が同一の点に対応するならば，ループ $\beta^{-1}\alpha$ の原像もまた T のループ，すなわち，α と β は同じ類に属する．

(iii) の証明；$\pi(t)=*\in X$ を満たす点 $t\in T$ を考える．T は弧状連結であるから，t と $*\in T$ は1つの道で結べて，その像は必然的に X のループとなり，そのホモトピー類は t に対応する．　(証明終)

もし $\pi: T\to X$ が被覆であり，$x\in X$, $t_1, t_2\in T$, $\pi(t_1)=\pi(t_2)=x$, さらに s が

t_1 と t_2 を結ぶ任意の道ならば，$\pi(s)$ は x に始点と終点をもつ零ホモトープでないループであることが定理２によりわかる．この事実により，§4 の定理３の証明のギャップを埋めることができる．すなわち，積の形 $\Theta=\Theta_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots\Theta_{i_k}^{\varepsilon_k}$ で表わされたいかなるループも，各因子 Θ_i の直後に Θ_i^{-1} を含まなければ零ホモトープでないということを証明しなければならない．ここで $\Theta_{i_n}^{\varepsilon_n}$ $(\varepsilon_n=\pm1)$ は一点和の第 i_n 番目の円に沿ったループを表わす．すなわち，われわれは円に沿って歩くことになっており，方向は ε_n の符号による．今，k は単語 Θ の文字の個数とし，次で示されているように，一点和の $(k+1)$ 個のコピーを考える．最初



$\Theta=\Theta_3\cdot\Theta_1^2\cdot\cdots\cdot\Theta_2$

に，この言語 Θ の最初の文字をとる．これは，この一点和のある円に対応する．第１と第２のコピーのこの円の小さい部分を切り取り，その自由な端を十文字に結ぶ．この修正した空間で，射影は自然な方法で定義される．次に，この単語の第２番目の文字を用いて第２と第３のコピーを同様に結ぶ．この方法を続けていって一点和の上に射影をもつ連結な空間を得る．もし，同じ文字が２つ続くときは，同じ円から２つの線分を切り取る．このとき，問題の文字の巾が１のときは，最初の線分は２番目のものより先にあり，逆の場合は，後にある．（考えているすべての円は向き付けられている．さもなければ，巾について言及するのは意味がない．）

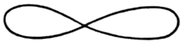
簡単に確かめられるように，結果は円の一点和上の $(k+1)$ 重の被覆であり，さらに，基点上のループは，基点上に射影される点の中で最も低い点から出発し，最も高い点で終わる道により被覆されており，したがって，零ホモトープではない．

定義　被覆は $\pi_1(T)$ の像が $\pi_1(X)$ の正規部分群であるとき**正則**であるという.

演習　被覆空間が正則であるための必要十分条件は，X の任意の道に対して，T におけるその上の道がすべて閉じているか，またはすべて閉じていないかのいずれかであることを証明せよ.

★**演習**　輪環面 $T^2=S^1\times S^1$ 上の任意の被覆空間は正則である．この輪環面の被覆空間を解説せよ.

演習　8字形空間 $S^1\vee S^1$ の被覆空間をすべて求めよ.



定義　被覆空間は $\pi_1(T)=0$ のとき**普遍**であるという.

例 (1), (3), (4) は普遍被覆空間である.

★**演習**　X 上の普遍被覆空間は X 上の任意の被覆空間の被覆空間でもあることを証明せよ.

★**演習**　$n\geq 2$ について $\pi_n(T)\cong\pi_n(X)$ であることを証明せよ.

(証明は§7にある.)



与えられた底空間上の被覆空間の分類

以下，X は**局所単連結**であると仮定する．すなわち，任意の $x\in X$ に対して弧状連結な近傍 $U(x)$ が存在し，$U(x)$ の任意の 2 点について，$U(x)$ の内部でこの 2 点を結ぶ道はすべて X においてホモトープとなる．

被覆空間の存在

定理　任意の部分群 $G\subset\pi_1(X)$ に対して，被覆 $\pi: T\to X$ が存在して，適当な点 $t\in\pi^{-1}(x_0)$ について $\mathrm{Im}\,\pi_*(\pi_1(T,t))=G$ となる．

構成法　X の道の空間を考える．同じ端点をもつ 2 つの道 α と β は，$\beta^{-1}\alpha$ の類が G に属するとき同一視する．T として道の同値類の空間を選び，射影としては，各道に 2 番目の端点を対応させる写像をとる．その結果得られるのは条件 $\mathrm{Im}\,\pi_*(\pi_1(T))=G$ を満たす被覆空間である．

演習　これを証明せよ．容易にわかるように，証明には局所単連結性が必要である．

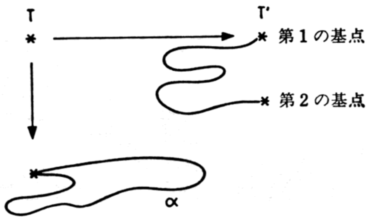
定義　2 つの被覆空間 $\pi: T\to X$ と $\pi': T'\to X$ は，同相写像 $T\approx T'$ が存在して，図

$$\begin{array}{ccc} & T\approx T' & \\ {\scriptstyle\pi}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle\pi'} \\ & X & \end{array}$$

が可換であるとき，**同値**であるといわれる．

定理　被覆空間 $\pi: T\to X$ と $\pi': T'\to X$ が同値であるための必要十分条件は，$\pi_*(T_1(X))$ と $\pi'_*(\pi_1(T'))$ が $\pi_1(X)$ の共役部分群となることである．

証明　被覆空間が同値ならば，考えている部分群は明らかに共役である．逆を証明するために，求められている同相写像を構成する．まず最初に，基点 $*\in T'$ を適当に選ぶことにより，共役部分群は単に一致することがわかるのに



注意する．

次に，$t\in T$ に T' の点を次の法則により対応させる：f は $*$ を出発する T の任意の道とする．これを X に射影し，再び T' にリフトする．このとき T' の終点を t に対応させる．この点が道の選び方によらないこと，得られた写像は同相であること，前ページの図式は可換であることを示すのは読者に任せる．

（証明終）

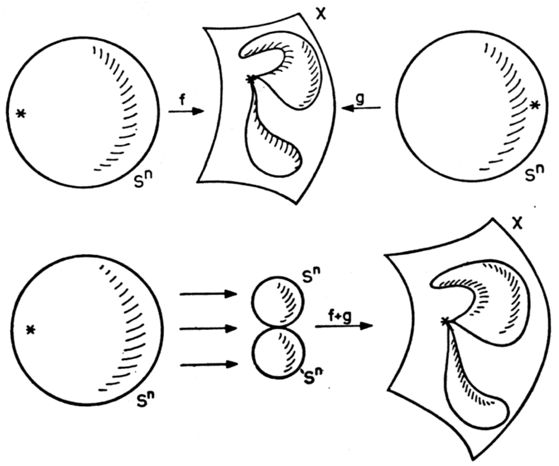
演習　輪環面上に，同値ではないが，同相である被覆空間の組を構成せよ．

§6. ホモトピー群

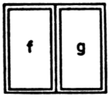
基点をもつ位相空間 X のホモトピー群は，一般の共変ホモトピー不変量の特別な場合として，§2においてすでに定義されている．この概念は非常に重要なので，ここでさらに考察を行なう．

集合 $\pi_n(X, x_0)$ は，S^n の基点を x_0 に写す写像 $S^n \to X$ のすべてのホモトピー類の集合として定義する．このような写像を**球写像**ということにする．若干異なった方法で，球写像は境界 ∂I^n を1つの点 x_0 に写す n 次元立方体 I^n から X への写像と定義してもよい．

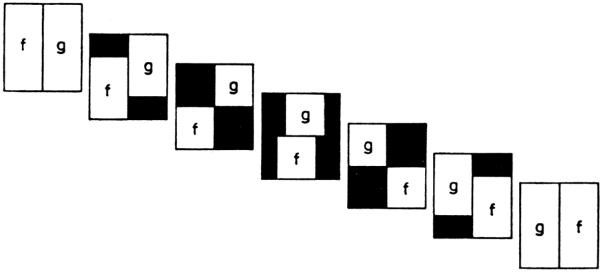
2つの球写像 $f, g: S^n \to X$ の**和**は次のように定義される球写像 $f+g: S^n \to X$ である：まず（基点を含む）S^n の赤道を1点に縮めると，球面は2つの球



面の一点和になる．この一点和の2つの球面を，それぞれ f, g により X に写す．一方，球写像 $f, g : I^n \to X$ が立方体からの写像として与えられたとする．このとき，和 $f+g$ は，立方体の左半分では f と I^n から立方体の左半分への縮小との合成，立方体の右半分では g と I^n から立方体の右半分への縮小との合成と一致するものとして定義される．



球写像の和は群演算ではないが，ホモトピー不変（$\Longleftrightarrow f \simeq f'$, $g \simeq g'$ ならば $f+g \simeq f'+g'$）であり，$\pi_n(X, x_0)$ に群演算を誘導する．結合性と単位元の存在は直接確かめられる（§2参照）．



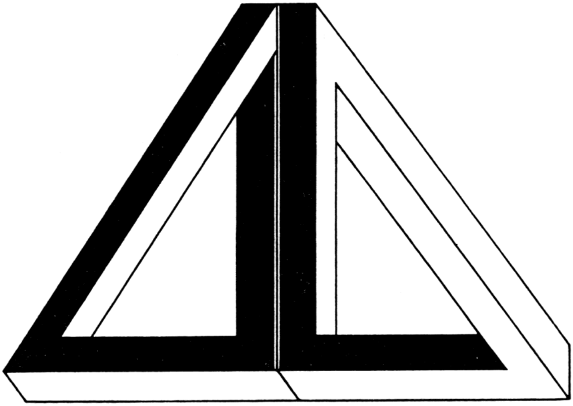
$n \geq 2$ についてこの演算は可換でもある．ただし，球写像 $f+g$ と $g+f$ の間のホモトピーは上の図で示されるように構成する（影の部分は x_0 に写す）．

基本群の場合のように，$\pi_n(X, x_0)$ の基点 x_0 についての依存性に関する疑問が自然におこる．X が弧状連結のときは，§4と同様な議論を用いて，任意の $x_0, x_1 \in X$ について $\pi_n(X, x_0)$ と $\pi_n(X, x_1)$ は同型であることを示すことができる．ここでも，ホモトープな道から得られる同型は一致する．この同型が，x_0 と x_1 の間の道の選び方にいつ無関係であるかという問題は興味深い．x_0 を基点とするループは $\pi_n(X, x_0)$ の自己同型を定義し，したがって，これは基本群 $\pi_1(X, x_0)$ の $\pi_n(X, x_0)$ への群作用を定義する．

定義　空間 X が **n 単純**であるとは，x_0 と x_1 を結ぶ道の任意の組に対して，この同型が一致するときである．同値なことであるが，$\pi_1(X, x_0)$ の $\pi_n(X, x_0)$

への作用が自明であるとき X は n 単純である．したがって，§4で示したように，空間 X が1単純であるための必要十分条件は $\pi_1(X, x_0)$ が可換となることである．もし，$\pi_1(X, x_0)=0$ ならば，X は明らかに任意の n について n 単純である．

演習　H-空間は任意の n について n 単純であることを証明せよ．



ホモトピー群と被覆

定理　任意の被覆 $\pi: T\to X$ に対して，誘導された準同型 $\pi_*: \pi_n(T)\to\pi_n(X)$ は $n\geq 2$ のとき同型である．

これは次の補題から直ちにわかる．

補題　$\pi: T\to X$ は被覆とする．任意の単連結（かつ局所単連結）な空間 Y と $\pi(t_0)=f(y_0)=x_0$ を満たす写像 $f: Y\to X$，ただし t_0, y_0, x_0 はそれぞれの空間の基点，に対して，自然な写像 $F: Y\to T$ が一意的に存在して，$F(y_0)=t_0$, $\pi\circ F=f$ を満たす．

補題の証明　$y\in Y$ とし，s は y_0 を y に結ぶ道とするとき，その像 $f(s)$ は x_0 を $f(y)$ に結ぶ道である．さて，T において，t_0 を出発し $f(s)$ を被覆する道 $\tilde{s}$ が存在するから，$\tilde{s}$ の終点を $F(y)$ で表わすことにする．Y は単連結であり，y_0 と y の間の任意の道は s にホモトープであるから，これは s の選び方によらない．したがって，写像 $F: Y\to T$ で $F(y_0)=t_0$, $\pi\circ F=f_0$ を満たすものが得られた．F が連続であることを示すのは読者に任せる．（ヒント：Y の局

所単連結性を用いる.）なお，Fの一意性は被覆する道の一意性からわかる.

（証明終）

定理の証明 球面S^nは$n\geq 2$のとき単連結であるので，任意の球写像$f: S^n\to X$に対して，補題により一意的に$F: S^n\to T$が存在して，$\pi\circ F=f$となる．したがって，$\pi_*: \pi_n(T)\to\pi_n(X)$は全射である.

さて，$S^n\times I$も単連結であるので，ホモトピー$\varphi: S^n\times I\to X$は一意的な$\Phi: S^n\times I\to T$，すなわち，それぞれ$\varphi|_{S^n\times\{0\}}$と$\varphi|_{S^n\times\{1\}}$を被覆し，補題によりホモトピー的に一意的な球写像である$\Phi|_{S^n\times\{0\}}$と$\Phi|_{S^n\times\{1\}}$とを結ぶホモトピーΦにより被覆されている．このように，ホモトープな球写像を被覆する球写像はまたホモトープであること，すなわち，$\pi_*: \pi_n(T)\to\pi_n(X)$は単射であることを得る．（証明終）

この定理は，ある空間のホモトピー群を計算するのに直ちに適用される．例えば，

$$\pi_n(S^1)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & n=1\\ 0 & n>1\end{cases}$$

である．最初の事実は§4で証明されており，残りは$n\geq 2$について$\pi_n(S^1)\cong\pi_n(\boldsymbol{R})$ということ，および$\boldsymbol{R}$の可縮性からわかる.

演習 Xがグラフならば，$n\geq 2$について$\pi_n(X)=0$であることを証明せよ.

演習 種数$g\geq 1$の曲面（g個のハンドルをもつ球面）のホモトピー群を求めよ.

★演習 $\pi_n(X\times Y)\cong\pi_n(X)\oplus\pi_n(Y)$を証明せよ.

★演習 CW複体Xが次元$1,\cdots,n$の胞体をもたないならば，$i\leq n$について$\pi_i(X)=0$であることを証明せよ．特に，$i<n$について$\pi_i(S^n)=0$である.

ヒント これは§3の胞体近似定理からわかる.

§7. ファイバー空間

§5では，局所的に開集合と離散集合の直積として構成される被覆空間を考察した．これは次のいわゆる局所自明なファイバー空間というもっと一般な概念の特別な場合である.

定義 E, B, Fは空間，$p: E\to B$は写像とする．(E, B, F, p)が**局所自明なフ**

ァイバー空間とは，各 $x\in B$ に対して近傍 $U\subset B$ と同相写像 φ が存在して，$p^{-1}(U)\overset{\varphi}{\approx}U\times F$ かつ右図が可換であるときをいう．

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \overset{\varphi}{\approx} & U\times F \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \text{自然な射影}} & \\ & U & \end{array}$$

p, F, B, E をそれぞれ，ファイバー空間の**射影**，**ファイバー**，**底空間**，**全空間**という．「ファイバー空間」という用語は E にも用いられる．

ファイバー空間は，$E\approx B\times F$ かつ右図が可換なとき，**自明**であるという．

$$\begin{array}{ccc} E & \approx & B\times F \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & B & \end{array}$$

ファイバー空間の例

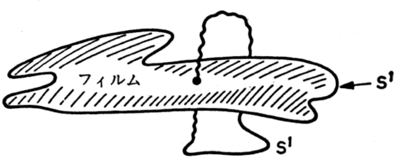
(1) 被覆空間．

(2) (E, B, F, p)，ただし E は Möbius の帯，B は Möbius の帯の円（中線），p は自然な射影，F は線分．これは恐らく，自明でないファイバー空間の例の中で最もよく知られたものである．

演習　これがファイバー空間であることを証明せよ．

(3) $S^3=\{(z_1, z_2)\in \boldsymbol{C}^2\,|\,z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=1\}$ とおき，$S^2=\boldsymbol{C}P^1$ は複素射影直線とし，$p: S^3\to S^2 \Longleftrightarrow p(z_1, z_2)=z_1z_2^{-1}$ と定義する．このとき (S^3, S^2, S^1, p) は局所自明なファイバー空間である．

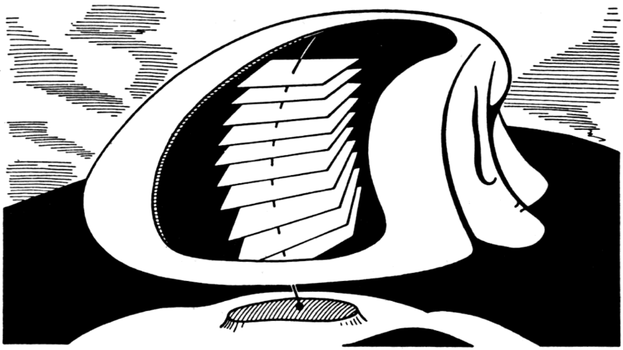
演習　任意の組 $x_0, x_1\in S^2, x_0\neq x_1$，に対して，$p^{-1}(x_0)$ と $p^{-1}(x_1)$ は S^3 においてまつわっている，すなわち，ファイバーの1つの上に張られたフィルムはもう1つのファイバーと必ず交わることを証明せよ．



(4) $G\supset H$ は Lie 群とその閉部分群とし，等質空間 G/H は $G \bmod H$ の右剰余類として定義するとき，射影 $G\to G/H$ は局所自明なファイバー空間を与える．

(5) $f: M^n\to M^k$ はコンパクト，滑らかな多様体の間の正則な写像，すなわ

ち，各接空間の上で微分は単射である写像とする．(M^n, M^k, F, f) はファイバー $F=L^{n-k}$ が $(n-k)$ 次元のコンパクトで滑らかな多様体であるような局所自明なファイバー空間である．



この事実の証明は，２段階

(i) $f^{-1}(y)$ は $(n-k)$ 次元の滑らかな多様体，ただし $y \in M^k$，である，

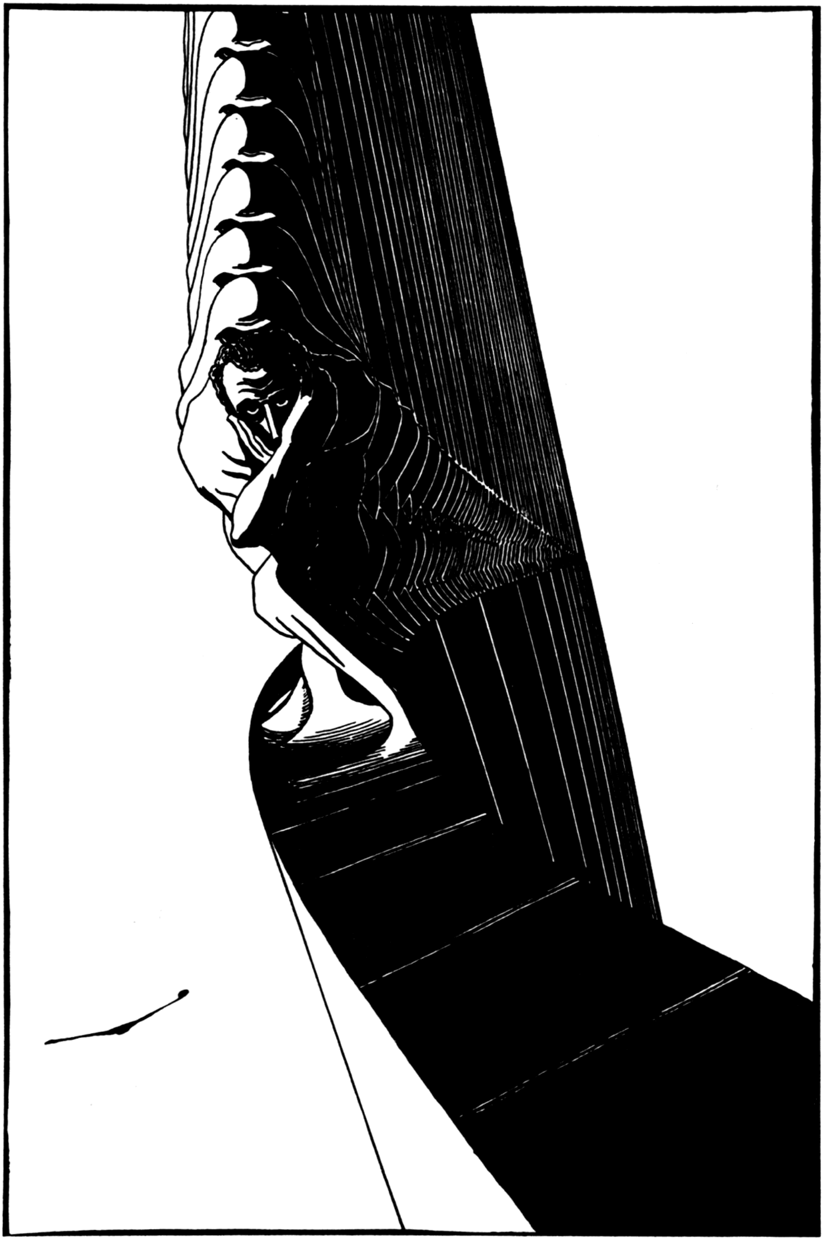
(ii) 任意の y_1, y_2 に対して，$f^{-1}(y_1) \approx f^{-1}(y_2)$

に分けて行なわれる．陰関数の定理により各点の原像は滑らかな多様体である．１つのファイバーに直交する平面は，写像の滑らかさからわかるように，このファイバーから少し離れた所でのみ互いに交わる．

(6) E は球面 S^{2k} の単位接ベクトルの空間，$B=S^{2k}$，$p: E \to S^{2k}$ は自然な射影とする．もしこのファイバー空間が自明ならば，非零切断，すなわち $p \circ \varphi = 1_B$ かつ任意の $b \in B$ に対して $\varphi(b) \neq b$ を満たす連続写像 $\varphi: S^{2k} \to E$ が存在する．したがって，S^{2k} 上に，S^{2k} 上のどこでも消えない連続なベクトル場が存在する．よく知られているように，偶数次元の球面上ではこのようなベクトル場は存在しない．

被覆ホモトピー

被覆射影のように，任意の局所自明なファイバー空間は一意性を除き，被覆ホモトピー性質をもつことがわかる．



定義　$p:E\to B$ は局所自明なファイバー空間，$B'\subset B$, $E'=p^{-1}(B')$ とする．このとき，p の制限 $p|_{E'}:E'\to B'$ は明らかに同じファイバーをもつ局所自明なファイバー空間である．これは，ファイバー空間 $p:E\to B$ の部分空間 B' への**制限**といわれる．これはもっと一般な概念の特別な場合である．

定義　$p:E\to B$ は局所自明なファイバー空間，$f:B_1\to B$ はある空間 B_1 から底空間 B への写像とする．ファイバー空間 $p_1:E_1\to B_1$ が f により p から**誘導された**といわれるのは，写像 $\hat{f}:E_1\to E$ が存在して，各点 $x\in B_1$ 上のファイバーは $f(x)\in B$ 上の p のファイバーに写され，ファイバー間の写像は同相写像であるときである．

補題　任意の局所自明なファイバー空間 $p:E\to B$ と写像 $f:B_1\to B$ に対して，誘導されたファイバー空間が存在する．

証明　$E_1=\{(e,b)\in E\times B_1 \mid f(b)=p(e)\}$ と定義し，$\hat{f}:E_1\to E$, $p_1:E_1\to B_1$ は積空間からのそれぞれ自然な射影とする．このとき，容易に $p_1:E_1\to B_1$ は f により $p:E\to B$ から誘導された局所自明なファイバー空間であることがわかる．　　（証明終）

補題（Feldbau の定理）　q 次元立方体 I^q 上の任意の局所自明なファイバー空間は自明である．

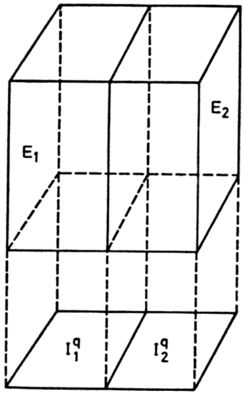
証明　まず，もし $p:E\to I^q$ が半立方体

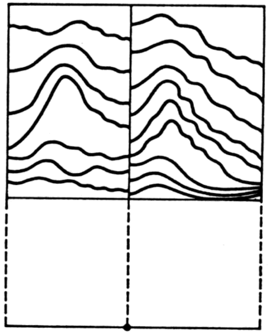
$$I^q_1=\{(x_1,\cdots,x_q)\mid 0\leq x_i\leq 1,\ i=1,2,\cdots,q-1\ ;\ 0\leq x_q\leq 1/2\}$$

と

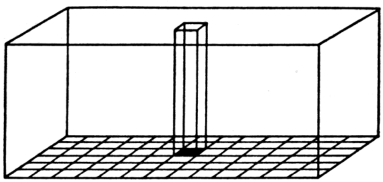
$$I^q_2=\{(x_1,\cdots,x_q)\mid 0\leq x_i\leq 1,\ i=1,2,\cdots,q-1\ ;\ 1/2\leq x_q\leq 1\}$$

の上で自明な制限をもつならば，自明なファイバー空間に同値であることを示す．実際，$p_1:E_1\to I^q_1$, $p_2:E_2\to I^q_2$ を制限とすると，仮定により $E_1=I^q_1\times F$, $E_2=I^q_2\times F$ である．ここで E_1 と E_2 の点はそれぞれ座標 (x,y), $[x,y]$ $(y\in F$, $x\in I^q_1$ または $x\in I^q_2)$ で表わす．$x\in I^{q-1}=I^q_1\cap I^q_2$ とする．座標 (x,y) をもつ E の各点は座標 $[x,y']$ ももつ．このとき対応 $y\longmapsto y'$ は関数 $f_x:F\to F$ を定義する．写像 $\pi:I^q_2\to I\Longleftrightarrow\pi(x_1,\cdots,x_q)=(x_1,\cdots,x_{q-1},1/2)$ を定義し，E_1 上で恒等写像であり，$[x,y]\in E_2$ を $(x,f_{\pi(x)}(y))$ へ写す写像 $\varphi:E\to E$ を考える．容易にわかるように，φ の存在性は，ファイバー空間の同値性を意味し，一方，構成されたファイバー空間は自明である．





さて，ファイバー空間は局所自明であるので，小立方体への I^q の十分細かい細分が存在して，その上で自明になる．この小立方体の任意のものから始めて，小立方体を次から次へとつなぎ，各段階で上の議論を適用してファイバー空間の自明性を証明できる．（証明終）



定理　（**被覆ホモトピー拡張定理**）（E, B, F, p）は局所自明なファイバー空間，Z は CW 複体，Z' はその部分複体とする．任意の写像 $H: Z \to E$, $p \circ H = h_0$ を満たす任意のホモトピー $h_t: Z \to B$ および $H'_0 = H|_{Z'}$ かつ $H'_t \circ p = h_t|_{Z'}$ を満たすホモトピー $H'_t: Z' \to E$ に対して，ホモトピー $H_t: Z \to E$ が存在して $p \circ H_t = h_t$, $H_0 = H$ かつ $H_t|_{Z'} = H'_t$ を満たす．

証明　1. 最初にファイバー空間 p は自明であると仮定する．このとき，命題は Borsuk の定理に帰着される．実際，もし $E = B \times F$ ならば，写像 $H: Z \to$

E とホモトピー $H'_t : Z' \to E$ はそれぞれ写像の対 $\varphi : Z \to B$, $\psi : Z \to F$ とホモトピーの対 $\varphi'_t : Z' \to B$, $\psi'_t : Z' \to F$ とみなせる．仮定により $\varphi = h_0$ かつ $\varphi'_t = h_t|_{Z'}$ である．さて，Borsuk の定理によりホモトピー $\psi_t : Z \to F$ が存在して，$\psi_0 = \psi$ かつ $\psi_t|_{Z'} = \psi'_t$ が成り立つ．そこで $H_t(z) = (h_t(z), \psi_t(z))$ とおく．

2. 一般の場合は帰納法を用いる．Z の 0 次元胞体について定理は明らかである．今，ホモトピーは $Z_1 = Z' \cup Z^{k-1} \cup_{i=1}^{s-1} e_i^k$ の上で与えられていると仮定し，これをホモトピー $H_t : Z_2 = Z_1 \cup e_s^k \to E$ に拡張する．胞体 e_s^k の特性写像 $f_s^k : D^k \to Z$ を考える．このとき，合成写像

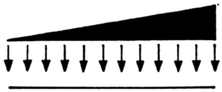
$$D^k \times I \xrightarrow{f_s^k \times 1_I} Z \times I \xrightarrow{h_t} B$$

により誘導されたファイバー空間 $p' : E' \to D^k \times I$, ただし $E' \subset D^k \times I \times E$, は Feldbau の定理により自明である．今 $\xi \in D^k$ に対して，$\Phi : D^k \to E' \subset D^k \times I \times E \Longleftrightarrow \Phi(\xi) = (\xi, 0, Hf_s^k(\xi))$ と $\varphi_t : D^k \to D^k \times I \Longleftrightarrow \varphi_t(\xi) = (\xi, t)$ により写像を定義し，次に，$\xi \in \partial D^k$ に対して $\Phi'_t : \partial D^k \to E' \subset D^k \times I \times E \Longleftrightarrow \Phi'_t(\xi) = (\xi, t, H_t f_s^k(\xi))$ により写像を定義する．ここで，$\xi \in \partial D^k$ について $f_s^k(\xi) \in Z^{k-1}$ である．すなわち，このような点については H_t はすでに定義されていることを思いおこそう．したがって，$\Phi|_{\partial D^k} \simeq \Phi'_0$, $p' \circ \Phi = \varphi_0$, $p' \circ \Phi_t = \varphi_t$ を満たす写像 $\Phi : D^k \to E'$, $\varphi_t : D^k \to D^k \times I$, $\Phi'_t : \partial D^k \to E'$ を得たことになる．自明なファイバー空間については定理は成り立つので，ホモトピー $\Phi_t : D^k \to E'$ が存在して $\Phi_t|_{\partial D^k} = \Phi'_t$, $p' \circ \Phi_t = \varphi_t$, $\Phi_0 = \Phi$ を満たす．胞体 e_s^k の点 ξ について $H_t(\xi) = \psi \Phi_t (f_k^s)^{-1}(\xi)$ とおく．ただし，$\psi : E' \to E$ は $D^k \times I \times E$ の最後の因子への射影の E' への制限である．これは，帰納法の段階で求められたように，H_t の Z_2 の上への拡張である．　(証明終)

Serre ファイバー空間

被覆ホモトピー性質はファイバー空間の新しい族を与える．**Serre ファイバー空間**とは，空間 E と B (B は弧状連結と仮定する) および任意の CW 複体に対して被覆ホモトピー性質 (CHP) をもつ写像 $p : E \to B$ の 3 対 (E, B, p) をいう．すなわち，Z が CW 複体，$f : Z \to E$ が写像であるとき，$p \circ f = \Phi|_{Z \times \{0\}}$ を満たす任意のホモトピー $\Phi : Z \times I \to B$ に対して，ホモトピー $F : Z \times I \to E$ が存在して，$F|_{Z \times \{0\}} = f$ かつ $p \circ F = \Phi$ を満たす．

Serre ファイバー空間は必ずしも局所自明とは限らない．簡単な例：



被覆ホモトピーの一意性が要求されていないことに注意する．

Serre ファイバー空間の例

(1)（上の定理により）任意の局所自明なファイバー空間．

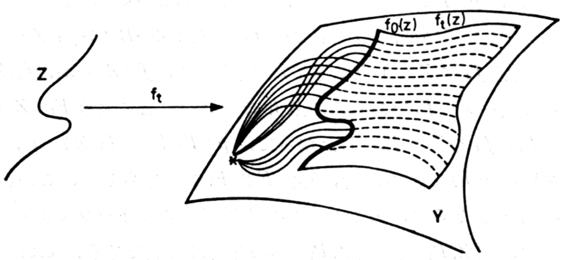
(2) 写像空間のファイバー空間．Y は任意の空間，$X\supset A$ は CW 複体とその部分複体とし，$\mathrm{Map}(X, Y)=\{$すべての連続写像 $X\to Y\}$ を思いおこそう．$E=\mathrm{Map}(X, Y)$, $B=\mathrm{Map}(A, Y)$ ととり，$p: E\to B \Leftrightarrow p(f)=f|_A$ により与えられる自然な写像 p を定義すると，Serre ファイバー空間 (E, B, p) を得る．

演習　これを証明せよ．

もし，X, A と Y が基点付きならば，$p: \mathrm{Map}_*(X, Y)\to \mathrm{Map}_*(A, Y)$ も Serre ファイバー空間である．

(3) 上の例で，X として基点 0 をもつ単位区間 $[0, 1]$，A として基点 0 をもつ集合 $\{0, 1\}$ とするとき，ファイバー空間 $(\mathrm{Map}_*(X, Y), \mathrm{Map}_*(A, Y), p)$ の底空間は $Y=\mathrm{Map}_*(A, Y)$, $y_0\in Y$ 上のファイバーは Y の基点を y_0 に結ぶすべての道の集合，射影 p は道にその終点を対応させる写像である．このとき被覆ホモトピーは次式で与えられる：

$$[F_t(z)](\tau)=\begin{cases}[F(z)](\tau(1+t)) & \tau(1+t)\leq 1 \text{ のとき}\\ f_{\tau(1+t)-1}(z) & \tau(1+t)\geq 1 \text{ のとき}\end{cases}$$



注意　ここでは，被覆ホモトピー性質 (CHP) が CW 複体ばかりでなく任意

の空間に対しても成り立つ．この強いCHPをもつファイバー空間は **Hurewicz ファイバー空間**とよばれる．

ファイバー

Serre ファイバー空間の一番最初の例で示したように，ファイバー（=1点の原像）は必ずしも互いに同相ではない．しかしながら，局所自明なファイバー空間のように，ある意味では，どの Serre ファイバー空間も各点上に標準的ファイバーをもつ．

空間 X が Y に**弱ホモトピー同値**であるとは，任意の CW 複体 Z に対して自然な一対一対応 $[Z,X]=[Z,Y]$ があるときをいう．すなわち，任意の CW 複体 Z に対して，一対一な写像 $\varphi_Z:[Z,X]\rightarrow[Z,Y]$ が存在して，任意の Z' と $f:Z\rightarrow Z'$ について右の図式は可換である．明らかに，ホモトピー同値は弱ホモトピー同値を意味する．この定義を§1のホモトピー同値の定義と比較されたい．

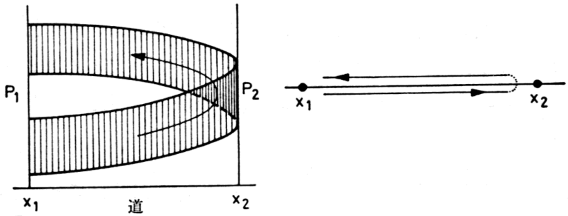
$$\begin{array}{ccc} [Z,X] & \xrightarrow{\varphi_Z} & [Z,Y] \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ [Z',X] & \xrightarrow{\varphi_{Z'}} & [Z',Y] \end{array}$$

定理　$p:E\rightarrow B$ が Serre ファイバー空間ならば，任意の $x_1,x_2\in B$ について，$p^{-1}(x_1)$ は $p^{-1}(x_2)$ に弱ホモトピー同値である．

注意　CW 複体ばかりでなく任意の位相空間 Z に対して，被覆ホモトピー性質が成り立つ，すなわち，Hurewicz ファイバー空間であるならば，ファイバーは互いに普通の意味でホモトピー同値である．

証明　$P_1=p^{-1}(x_1)$, $P_2=p^{-1}(x_2)$ とする．任意のCW複体 Z に対して $[Z,P_1]=[Z,P_2]$ を示さなければならない．写像 $F:Z\rightarrow P_1\subset E$ が与えられているとする．明らかに，$p\circ F:Z\rightarrow x_1$ である．点 x_1 から x_2 へ道 ϕ で結ばれているとする．この道 ϕ を用いて，ホモトピー f_t を $f_t:Z\rightarrow B\Leftrightarrow f_t(Z)=\phi(t)$ により定義する（各 f_t は Z を1点に写す）．明らかに，$f_0(Z)=x_1$, $f_1(Z)=x_2$ であり，さらに $p\circ F=f_0$ である．被覆ホモトピー性質により $F_t:Z\rightarrow E$ が存在して，$p\circ F_t=f_t$ を満たす．したがって，$p\circ F_1(Z)=f_1(Z)=x_2$, すなわち $F_1:Z\rightarrow p^{-1}(x_2)=P_2$ である．今，写像 F に F_1 を対応させる．このとき2つの写像がホモトープならば，それに対応する写像もホモトープである．明らかに，誘導された $[Z,P_1]$ から $[Z,P_2]$ への対応は自然である．これが一対一であることを示すのが残っている．

このために，同様な方法で逆写像を定義する．上述の議論との唯1つの差は，x_1 と x_2 を結ぶ道 ϕ が今度は逆向きに通ることである．さて，写像 $g:Z\times[0,2]\to E$ で，$p\circ g$ が2重の道，すなわち，ϕ の往復であるものが存在する．この2重の道は x_1 に可縮であり，したがって，$p\circ f$ は写像 $Z\times[0,2]\to x_2$ にホモトープである．このホモトピーを E_2 にリフトして，もとの $F:Z\to P_1$ と，F を F_1 に「追いやり」，ついで再びこれを写像 $Z\to P_1$ に変えて得られる写像との間のホモトピーを得る．これは，$[Z,P_1]$ と $[Z,P_2]$ の間の対応が一対一であることを証明している．（証明終）



この定理は，Serre ファイバー空間において異なる点上のファイバーは弱ホモトピー同値であることを意味している．すなわち，x_1, x_2, x_3, x_4 が弧状連結空間 X の点ならば，x_1 と x_2 を結ぶすべての道の空間は x_3 と x_4 を結ぶすべての道の空間に弱ホモトピー同値である．考えているファイバー空間は Hurewicz ファイバー空間だから，実はこれらの空間は通常の意味でもホモトピー同値である．

任意の写像は Serre ファイバー空間にホモトピー同値

2つの写像 $f:X\to Y$, $g:X_1\to Y_1$ が与えられているとする．f と g が**ホモトピー同値**であるとは，ホモトピー同値 $\varphi:X\to X_1$ と $\phi:Y\to Y_1$ が存在して，次の図式

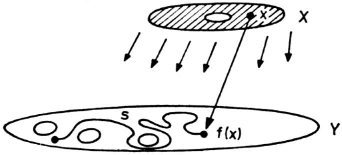
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ X_1 & \xrightarrow{g} & Y_1 \end{array}$$

が可換であるときをいう．

定理　Y は弧状連結であるとする．このとき，任意の写像 $f:X\to Y$ に対し

て，ホモトピー同値な Serre ファイバー空間 $p: X' \to Y$ が存在する．

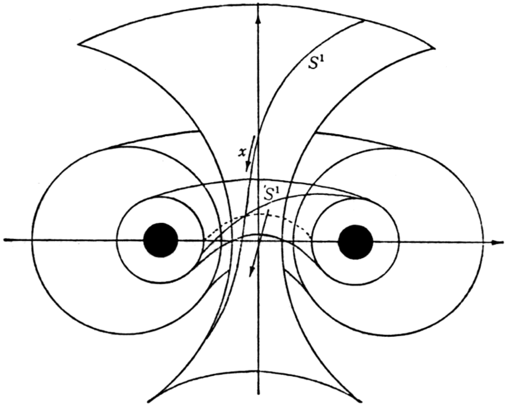
証明　X にホモトピー同値な空間 X' を次のように構成する：$X' = \{(x, s) \in X \times \mathrm{Map}(I, Y) \mid s(0) = f(x)\}$ とおく．すなわち，X' の点は $x \in X$ と $f(x)$ か

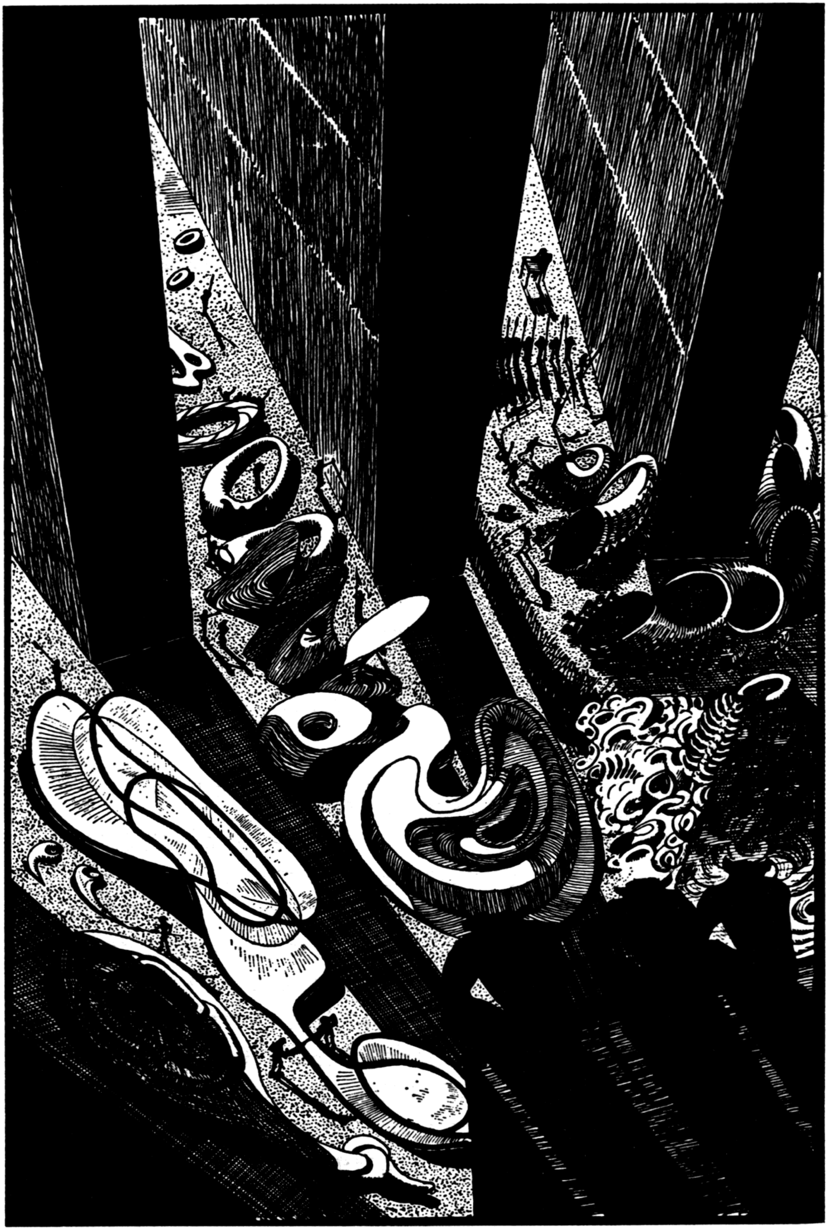


ら出発する Y の道 s の対 (x, s) である．明らかに $X \simeq X'$ である．また，$p: X' \to Y \Leftrightarrow p(x, s) = s(1)$ と定義する．明らかに，p は f にホモトピー同値であり，これが Serre ファイバー空間であることをみるのは容易である．

（証明終）

さらに，上のように構成されたファイバー空間 p は Hurewicz ファイバー空間である．特に，そのファイバーは通常の意味で互いにホモトピー同値である．

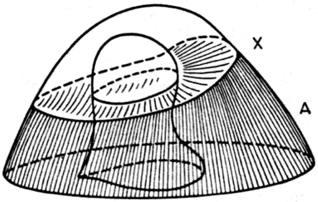




§8. 相対ホモトピー群とファイバー空間のホモトピー系列

基点付き空間の場合と同様に，ホモトピー群は基点付き空間の対，すなわち，空間 X とその部分空間 A および基点 $x_0 \in A$ からなる 3 対 (X, A, x_0) にも定義することができる．

立方体 I^n を $I^{n-1} \times [0,1]$ の形で表わす．基点 x_0 をもつ対 (X, A) の**相対 n 次元球写像**とは $f(I^{n-1} \times \{0\}) \subset A$ かつ $f(J_n) = x_0$ を満たす写像 $f : I^n \to X$, ただし $J_n = \partial I^n \backslash (I^{n-1} \times \{0\})$, である．



相対球写像 $f, g : I^n \to X$ は写像 f と g が相対球写像の圏でホモトープであるとき，**ホモトープ**であるという．基点 x_0 をもつ (X, A) の n 次元相対球写像のホモトピー類の集合は，$\pi_n(X, A, x_0)$ と表わされる．

相対球写像 $f, g : I \to X$ の**和**は

$$h(x,t) = \begin{cases} f(x, 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \text{ のとき} \\ f(x, 2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \text{ のとき} \end{cases} \quad (\text{ここで } x \in I^{n-1})$$

により定義される．読者はこの式を注意深く調べること，特に，相対球写像の和は $n>1$ についてのみ定義されていることを確かめてほしい．

相対球写像の和はホモトピー不変な演算である．すなわち，もし $f \simeq f'$ かつ $g \simeq g'$ ならば $h \simeq h'$ である．これは $\pi_n(X, A, x_0)$ に，これも**和**とよばれる演算を与える．集合 $\pi_n(X, A, x_0)$ はこの和に関して（$n>1$ のとき）群となる．結合性はホモトピー $(f_1+f_2)+f_3 \simeq f_1+(f_2+f_3)$ を直接構成することにより証明できる．（平面は t_1 軸に沿って変位され，線分 $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 1]$ はそれぞれ $[0, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, $[3/4, 1]$ に写される．）この群の単位元は定値写像 $f_0(I^n) = x_0$ のホモトピー類である．任意の写像 f に対してホモトピー $f_0 + f \simeq f$ は $[0, 1/2]$ を点 0 に縮め，$[1/2, 1]$ を全線分 $[0, 1]$ に拡張し，t_1 軸

を変位して構成できる．立方体 I^n 全体を A に写す写像 f は明らかに相対球写像として零ホモトープである．$\bar{f}: I^n \to X \Leftrightarrow \bar{f}(x,t)=f(x,1-t)$ により定義される球写像 $\bar{f}$ はホモトピー類 $[f]\in\pi_n(X,A,x_0)$ の逆元を表わす．

$n\geq 3$ ならば，群 $\pi_n(X,A,x_0)$ は可換である．これは球写像 $f+g$ と $g+f$ を結ぶホモトピーを直接構成し，絶対（すなわち通常の）ホモトピー群の類似の性質から推論して証明できる．実は，次の補題を用いることができる．

補題　射入 $i: A\to X$ が Serre ファイバー空間 $\eta: A'\to X$ にホモトピー同値（§6 の末尾の構成参照）ならば，$\pi_n(X,A,x_0)\cong\pi_{n-1}(F)$ である．ただし，F はこのファイバー空間のファイバーである.（η のすべてのファイバーは互いにホモトピー同値であることはすでに指摘している.）

この証明には後ほど戻ることにする．

基点のある任意の対 (X,A) に対して $\pi_n(X,A,x_0)$ を定義したことになる．これは，$n\geq 1$ については特別な元(零)をもつ集合，$n\geq 2$ については群，$n\geq 3$ については可換群である．もし $A=x_0$ ならば $\pi_n(X,A,x_0)=\pi_n(X,x_0)$ である．任意の写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$ は準同型 $f_*:\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_n(Y,B,f(x_0))$ を誘導する．弧状連結な A に対しては，$\pi_n(X,A,x_0)$ と $\pi_n(X,A,x_1)$ は同型であり，x_0 と x_1 の間の道のホモトピー類を固定して同型は標準的であるという意味で，$\pi_n(X,A,x_0)$ は x_0 に無関係である．

準同型 ∂

準同型 $\partial:\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_{n-1}(A,x_0)$ を次のように定義する．$\alpha\in\pi_n(X,A,x_0)$ は写像 f により表わされているとし，I^n の面 I^{n-1} への制限 $\partial f=f|_{I^{n-1}}$ を考える．このとき I^{n-1} の境界 ∂I^{n-1} もまた x_0 に写されるから $\partial f:(I^{n-1},\partial I^{n-1})\to(A,x_0)$ である．(I^n,I^{n-1},J^{n-1}) から (X,A,x_0) への写像 f,g の間の任意のホモトピーは制限 $f|_{I^{n-1}}$ と $g|_{I^{n-1}}$ の間のホモトピーを定義する．したがって，対応 $f\to\partial f$ はホモトピー類の対応 $\alpha\to\partial\alpha$ を与え，これは明らかに $\partial(\alpha_1+\alpha_2)=\partial\alpha_1+\partial\alpha_2$ を満たす．すなわち，∂ は準同型である．

対のホモトピー系列

系列

$$\cdots\xrightarrow{\partial}\pi_n(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X,x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_{n-1}(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{j_*} \pi_2(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0)$$

は**対のホモトピー系列**とよばれ，完全性というすばらしい性質をもっている．つまり，各項において左の準同型の像は右の準同型の核と一致する．すなわち，次が成り立つ：

(i)　$\mathrm{Im}\,\partial = \mathrm{Ker}\, i_*$,

(ii)　$\mathrm{Im}\, i_* = \mathrm{Ker}\, j_*$,

(iii)　$\mathrm{Im}\, j_* = \mathrm{Ker}\,\partial$.

ここで，i_* と j_* は射入 $i: A \subset X$ と $j: (X, x_0, x_0) \to (X, A, x_0)$ により誘導される準同型である．($\pi_1(X, A, x_0)$ は必ずしも群ではないことを思いおこしてほしい．この項における核は，$f: S^1 \to x_0$ により表わされるホモトピー類の原像であると了解する．)

証明は読者に任せる．

この系列のさらに重要な性質を述べよう．もし，$h: (X, A, x_0) \to (Y, B, x_0)$ が写像ならば，次の図は可換である：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} \cdots \\
 & \downarrow h_* & & \downarrow h_* & & \downarrow h_* & & \downarrow h_* & \\
\cdots \xrightarrow{\partial} & \pi_n(B, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(Y, y_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(B, y_0) & \xrightarrow{i_*} \cdots
\end{array}$$

代数的補遺：完全系列

★演習 1　系列 $0 \to A \to 0$ が完全であるための必要十分条件は，$A=0$ であることを示せ．

★演習 2　系列 $0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \to 0$ が完全であるための必要十分条件は，A と B が互いに同型で，$\varphi: A \to B$ は同型であることを示せ．

★演習 3　系列 $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ が完全であるための必要十分条件は，A が B の部分群に同型，$i: A \to B$ は射入，$C \cong B/A$ かつ $\pi: B \to C \cong B/A$ は自然な射影であることを示せ．

★演習 4　もし $0 \to A_1 \to \cdots \to A_n \to 0$ が完全系列ならば，次が成り立つことを示せ：

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i (A_i \text{ の階数}) = 0$$

★**演習 5**（**5 補題**）　次の可換な図式

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \to & A_2 & \to & A_3 & \to & A_4 & \to & A_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ B_1 & \to & B_2 & \to & B_3 & \to & B_4 & \to & B_5 \end{array}$$

において，横の系列は完全系列，φ_2 と φ_4 は同型，φ_1 は全射準同型，φ_5 は単射準同型と仮定する．このとき φ_3 は同型である．

この補題は位相幾何学においては，完全系列が使われるときはいつでも，なくてはならないものである．読者は是非これを証明してみてほしい．

対の完全系列の最初の応用

演習 6　写像 $f:(X,A)\to(Y,B)$ が同型

$$f_*:\pi_q(X)\xrightarrow{\cong}\pi_q(Y) \quad と \quad (f|_A)_*:\pi_q(A)\xrightarrow{\cong}\pi_q(B)$$

を誘導するならば，$f_*:\pi_q(X,A)\to\pi_q(Y,B)$ もすべての q について同型であることを証明せよ．

演習 7　A は X の変位レトラクトと仮定する．このとき，任意の $x_0\in A$ に対して，射入準同型 $i_*:\pi_n(A,x_0)\to\pi_n(X,x_0)$ は，$n\geq 1$ のとき単射であり，$n\geq 2$ のときは次の直和分解

$$\pi_n(X,x_0)\cong\pi_n(A,x_0)\oplus\pi_n(X,A,x_0)$$

を与えることを証明せよ．

演習 8　A が X において 1 点 $x_0\in A$ に可縮ならば，$n\geq 1$ について準同型 $i_*:\pi_n(A,x_0)\to\pi_n(X,x_0)$ は自明であり，さらに，$n\geq 3$ について次の直和分解

$$\pi_n(X,A,x_0)\cong\pi_n(X,x_0)\oplus\pi_{n-1}(A,x_0)$$

を与えることを証明せよ．

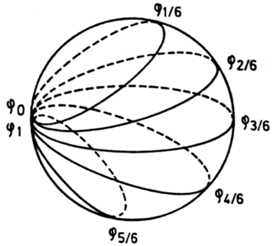
ファイバー空間のホモトピー系列

(E,B,F,p) は Serre ファイバー空間とする．基点 x_0 をもつ対 (E,F)，$F=p^{-1}(p(x_0))$，のホモトピー完全系列は次のようになる：

$$\cdots\xrightarrow{\partial}\pi_n(F,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(E,x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(E,F,x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_{n-1}(F,x_0)\xrightarrow{i_*}\cdots$$

$$\cdots\xrightarrow{j_*}\pi_2(E,F,x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_1(F,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_1(E,x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_1(E,F,x_0)$$

さて，注意すべき事実は，これが絶対ホモトピー群のみを用いて書くことができるということである．これはまったく簡単に証明できる同型 $\pi_n(E,F)\cong\pi_n(B)$ からわかる．実際，準同型 $p_*:\pi_n(E,F)\to\pi_n(B,*)$ はファイバー空間の射影 p により誘導され，これは CHP（被覆ホモトピー性質）により単射であり，また次の事実により全射である．今，$\alpha\in\pi_n(B,*)$ とし，$f:S^n\to B$ は α の代表元とする．$n=2$ については次の図によって示されるホモトピーを $\varphi_t:$

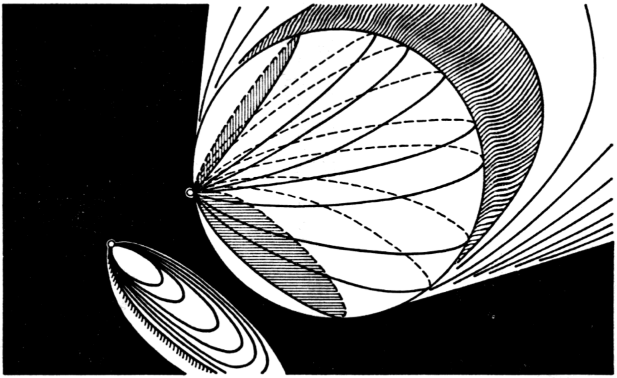


$S^{n-1}\to S^n$ で表わす．これは任意の n についても同様に定義される．$(n-1)$ 次元球面を Z で表わし，$f_t=f\circ\varphi_t:Z\to B$ とおき，写像 h を，$h(Z)=x_0\in E$ と定義する．CHP によれば，ホモトピー $h_t:Z\to E$ が存在して，$h_0=h$ かつ $p\circ h_t=f_t$ となる．特に，$h_1(Z)\subset F$ である．明らかに $\bigcup_{0\leq t\leq 1} h_t(Z)$ は f に射影される (E,F) の相対球写像になる．

以上により，$\varDelta=\partial\circ p_*^{-1}:\pi_n(B)\to\pi_n(E,F)\to\pi_{n-1}(F)$ は準同型であり，これをファイバー空間のホモトピー完全系列の**境界準同型**という．

相対ホモトピー群を考えずに，直接，準同型 $\varDelta:\pi_n(B)\to\pi_{n-1}(F)$ を構成できる．読者は次ページの絵により示唆される方法でこれを構成することを勧める．このようにして得られた系列は絶対ホモトピー群のみを含み，**ファイバー空間の完全系列**とよばれる．最終的な形は次の通りである：

$$\cdots\xrightarrow{\varDelta}\pi_n(F)\xrightarrow{i_*}\pi_n(E)\xrightarrow{p_*}\pi_n(B)\xrightarrow{\varDelta}\pi_{n-1}(F)\xrightarrow{i_*}\cdots\xrightarrow{p_*}\pi_1(B)$$



ファイバー空間の完全系列の応用

★演習　Hopf ファイバー空間の完全系列から可能な限りすべての結果を導き出せ．

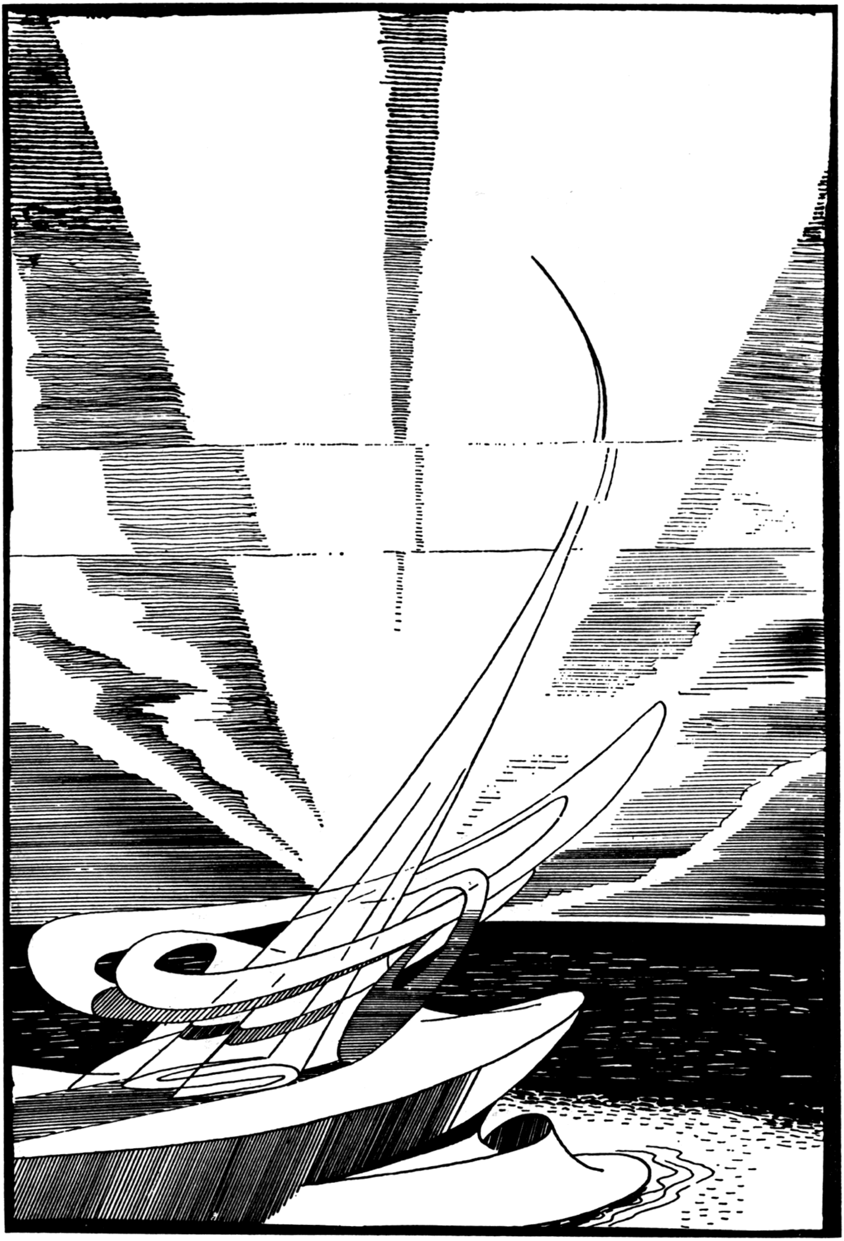
ここで，この系列からわかる同型 $\pi_2(S^2)\cong \boldsymbol{Z}$ は様々な理由で重要である：第1に，2次元球面は可縮でないことをこれは証明している．第2に，$\pi_n(S^n)$ を計算する一般的な方法はこの場合には適用できない．したがって，$\pi_2(S^2)\cong \boldsymbol{Z}$ は帰納法の出発点に必然的になっている．また，この完全系列からわかる同型 $\pi_3(S^2)\cong\pi_3(S^3)$ は 1930 年代前半の大きなセンセーションの1つであったことを付記しておく．

★演習　（ファイバー S^1 をもつファイバー空間 $S^\infty \to \boldsymbol{C}P^\infty$ を用いて）無限次元複素射影空間 $\boldsymbol{C}P^\infty$ のホモトピー群を求めよ．

★演習　ファイバー空間の底空間（またはファイバー）が可縮ならば，全空間のホモトピー群はファイバー（または底空間）のホモトピー群に同型であることを示せ．

★演習　底空間とファイバーのホモトピー群がすべて有限ならば，全空間のホモトピー群も有限であり，それらの位数は底空間とファイバーの同次元のホモトピー群の位数の積を越えないことを示せ．

★演習　ファイバー空間の底空間とファイバーが有限生成のホモトピー群をもつならば，全空間も同じ性質をもち，さらに，全空間の q 次ホモトピー群の



階数は，底空間とファイバーの q 次ホモトピー群の階数の和より大きくはないことを示せ．

★演習 任意の弧状連結な X と任意の $x_0 \in X$ に対して，同型

$$\pi_q(X, x_0) \cong \pi_{q-1}(\Omega X, \omega_{x_0})$$

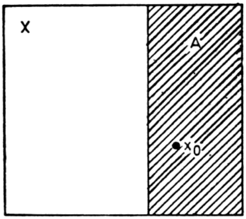
があることを証明せよ．ただし，ω_{x_0} は点 x_0 における定値ループである．

★演習 弧状連結な X の対 (X, A) を考える．固定した点 x_0 から出発し，A で終わる X のすべての道の空間を Λ で表わすとき，同型 $\pi_q(X, A, a) \cong \pi_{q-1}(\Lambda, \lambda a)$ が成り立つことを証明せよ．ただし，λa は x_0 から出発し，$a \in A$ に終わる任意の道である．

演習 ファイバー空間 $p: E \to B$ は切断 $\chi: B \to E$ をもつと仮定する．このとき，p_* は $n \geq 1$ について全射準同型，$n \geq 2$ について直和分解 $\pi_n(E, e_0) \cong \pi_n(B, b_0) \oplus \pi_n(F, e_0)$ を与えることを示せ．ただし $e_0 = \chi(b_0)$ である．

(X, A) は任意の対とする．射入 $A \to X$ は A をホモトピー同値な A' で取り換えて，Serre ファイバー空間に変えることができるのはもうわかっている．対 (X, A) とファイバー空間 $p: A' \to X$ の完全系列を考え，これら完全系列の間の準同型を構成しよう．以下，F はファイバー空間 p のファイバーを表わし，準同型 $\pi_{n-1}(F) \to \pi_n(X, A)$ を次のように定義する．F の点は x_0 から出発し，A のどこかで終わる X の道である．$f: I^{n-1} \to F$ が球写像のとき，写像 $h: I^n = I^{n-1} \times I \to X \Longleftrightarrow h(x, t) = (f(x))(1-t)$ は対 (X, A) の相対球写像である．f に h を対応させて，準同型 $\pi_{n-1}(F) \to \pi_n(X, A)$ が得られ，この準同型を含む図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & \pi_n(X) & \to & \pi_n(X, A) & \to & \pi_{n-1}(A) & \to & \pi_{n-1}(X) & \to \cdots \\
& \| & & \uparrow & & \uparrow & & \| & \\
\cdots \to & \pi_n(X) & \to & \pi_{n-1}(F) & \to & \pi_{n-1}(A') & \to & \pi_{n-1}(X) & \to \cdots
\end{array}$$



は可換であり，5補題により $\pi_{n-1}(F)\to\pi_n(X,A)$ は同型となる．ただし，$\pi_{n-1}(A')\to\pi_{n-1}(A)$ は射影 $A'\to A$ により誘導された準同型である（§5参照）．

これら球写像の間の問題にしている対応は一対一であることのみに注意して，同じ結論を5補題を用いずに得ることができるが，ここではファイバー空間の完全系列の性質をより明確にするから，もっと長い方法を選んだのである．

§9. 懸垂準同型

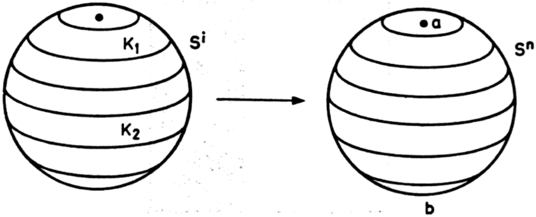
球写像 $f:S^n\to X$ の懸垂 $\Sigma f:S^{n+1}=\Sigma S^n\to\Sigma X$ も明らかに球写像である（懸垂の定義については§2を参照）．$f,g:S^n\to X$ がホモトープならば，Σf と Σg もホモトープである．容易にわかるように，球写像 $\Sigma(f+g)$ は $\Sigma f+\Sigma g$ にホモトープであり，したがって，f に Σf を対応させて準同型 $\pi_n(X)\to\pi_{n+1}(\Sigma X)$ を得る．これは**懸垂準同型**とよばれ，Σ と表わされる．

定理（Freudenthal）懸垂準同型 $\Sigma:\pi_{i-1}(S^{n-1})\to\pi_i(S^n)$ は $i\leq 2n-2$ のとき全射，$i<2n-2$ のとき同型である．

これは Freudenthal の定理の「やさしい部分」とよばれている．「難しい部分」はこの節のもっと後で述べる．Freudenthal の定理の次の一般化は第III章まで証明できないので，この章の演習と考えてほしい．

定理　K は CW 複体とする．$i<n-1$ について $\pi_i(K)=0$ ならば，懸垂準同型 $\Sigma:\pi_{i-1}(K)\to\pi_i(\Sigma K)$ は $i<2n-2$ のとき同型，$i=2n-2$ のとき全射である．

Freudenthal の定理の証明　$f:S^i\to S^n$, $i<2n-1$ とする．$h:S^{i-1}\to S^{n-1}$ が存在して，f は $\Sigma h:\Sigma S^{i-1}=S^i\to S^n$ にホモトープであることを証明しなければならない．



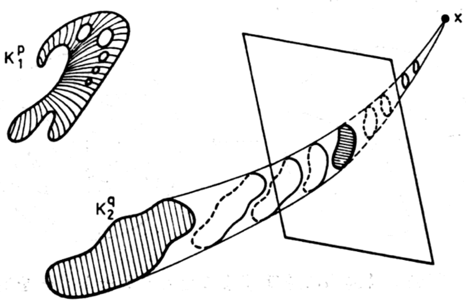
球面 S^i と $S^n=\Sigma S^{n-1}$ は3角形分割されているとする. a と b は球面 S^n の「北極」と「南極」を表わし, S^n の3角形分割は, a と b が n 次元単体の内点であるようにされており, f は単体的であると仮定する. $K_1=f^{-1}(a)$, $K_2=f^{-1}(b)$ とおく. これらは凸多面体から成り立っているので, 一般に単体複体ではないが, 容易に3角形分割できる.

次に, ユークリッド空間における線型な単体複体の状況に関するいくつかの明白な幾何学的事実について述べておこう.

(1) K_1^p と K_2^q は $\boldsymbol{R}^n$ における複体とする. $p+q<n$ ならば, 任意の $\varepsilon>0$ に対して, それぞれの ε'-シフト, ただし $\varepsilon'<\varepsilon$, によりこれらの複体を互いに交わらぬようにできる.

(2) K_1^p と K_2^q が**まつわらない**とは, これらを $(n-1)$ 次元の超平面により分離される複体に変換するような id $\boldsymbol{R}^n$ のイソトピー (⟺同型から成るホモトピー) が存在するときをいう. $p+q<n-1$ ならば, K_1^p と K_2^q はつねにまつわらない.

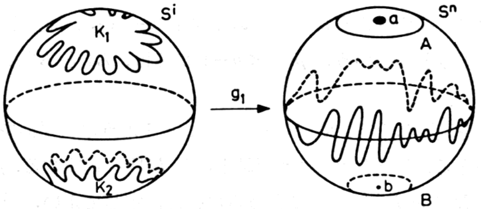
第2の命題を説明しよう. K_1^p が一方の側にあるような超平面を1つ選び, 反対側に点 x をとる. 頂点を x にもつ K_2^q 上の錐 L^{q+1} を構成する. $p+(q+1)<n$ であるから, L^{q+1} と K_1^p は互いに交わらないと仮定してよい. 次に, K_2^q を錐を通して超平面の反対側に引張る. L^{q+1} の小さな近傍の外側では, イソトピーは停常的であるとしてよい.



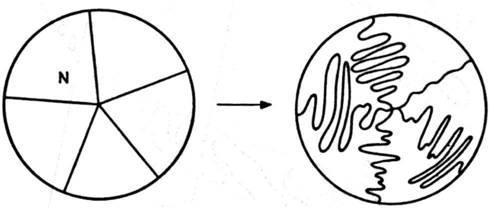
さて, 球面 S^i と複体 K_1 と K_2 とを考えよう. a と b は, n 次元単体の内点であるから, $\dim K_j\leq i-n$ である. もし $(i-n)+(i-n)<i-1$, すなわち,

$i<2n-1$ ならば，K_1 と K_2 はまつわらない．すなわち，S^i から S^i へのイソトピー φ_t があって K_1 と K_2 を異なる半球面（K_1 を「北半球」，K_2 を「南半球」）へ写す．すなわち，φ_0 は恒等写像，$\varphi_1(K_1)$ と $\varphi_1(K_2)$ はそれぞれ異なる半球面に属し，各 φ_t は同相写像であるイソトピー $\varphi_t : S^i \to S^i$ が存在する．

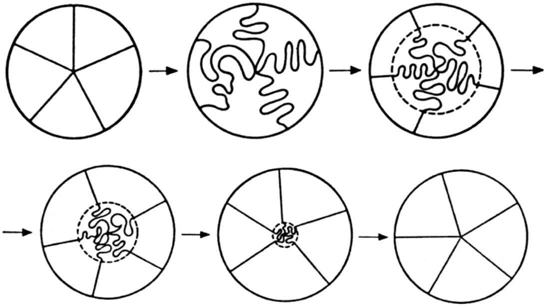
ホモトピー $g_t : S^i \xrightarrow{\varphi_t^{-1}} S^i \xrightarrow{f} S^n$ を考える．このとき $g_1^{-1}(a)$ と $g_1^{-1}(b)$ は異なる半球面にあり，一方，S^i の赤道の像は a または b を含んでいない．さらに，赤道のいかなる点も含まない a と b のそれぞれ近傍 A と B が存在する．ここで A と B をそれぞれ北半球，南半球に拡張し，残りを赤道の上におしつけるホモトピー $S^n \to S^n$ が存在する．これを $g_1 : S^i \to S^n$ と合成して，最後の状態がかなり良い写像 $S^i \to S^n$ であるホモトピーを得る．これは赤道および２つの半



球面を自分自身に写す．さて，北極から（したがって北半球のみしか見られないが）S^i と S^n を眺めよう．可能な限りすべての子午線を引き，この写像によりどこへ写されるか追求してみる．

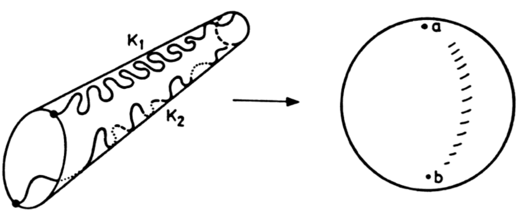


さらに，この写像を最終的に懸垂写像に変えるホモトピーを構成することができる．その構成法は次ページの絵で示す通りである．すなわち，各半径の像は北極に引張られ，その延びた部分は半径で置き換えられる．これは，懸垂準同型が実は全射であることを証明している．（この巧妙なホモトピーはずいぶ



ん前に J. Alexander により考案されたものである.)

証明を終えるためには，$i<2n-2$ のとき単射であることを示さなければならない．$f_1=\Sigma h_1 : S^i \to S^n$ と $f_2=\Sigma h_2 : S^i \to S^n$ は球写像とし，もし $f_1=\Sigma h_1$ と $f_2=\Sigma h_2$ がホモトープならば，h_1 と h_2 もホモトープであることを示す．f_1 と f_2 を結ぶホモトピー f_t は，各 f_t が懸垂球写像であるようなものに変えておかなければならない．実際は $S^i \times I \to S^n$ という形の写像であるこのホモトピー f_t を考えよう．もう一度，集合 $K_1=f^{-1}(a)$ と $K_2=f^{-1}(b)$ を調べる．$\dim K_j$



$\leq(i+1)-n$ かつ $\dim(S^i \times I)=i+1$ であるから，K_1 と K_2 は $S^i \times I$ を通して変位され，分離される．これは，$(i+1-n)+(i+1-n)<i+1-1$，すなわち，$i<2n-2$ のときはいつでもできる．残りの議論は，全射の性質を証明するときに用いたものと同様である．　(証明終)

定理 (Hopf)　$\pi_n(S^n)\cong \boldsymbol{Z}$

$n=1,2$ については，§4と§8で証明されている．$n\geq 3$ については Freudenthal の定理を考慮すれば，$\pi_{n-1}(S^{n-1})\cong \boldsymbol{Z}$ から同型はわかる．

系　球面 S^n はいずれも可縮ではない.

これまでは，この種の命題を述べることはできなかったし，自明でない n 次ホモトピー群をもつ空間が存在するかどうかという問題にも答えることはできなかったのである.

さらに，

系　$\pi_3(S^2)\cong \boldsymbol{Z}$

実際，ファイバー S^1 をもつ Hopf ファイバー空間 $S^3\to S^2$ の完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_3(S^1) & \to & \pi_3(S^3) & \to & \pi_3(S^2) & \to & \pi_2(S^1) \\ \| & & & & & & \| \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

を考えて，$\pi_3(S^2)\cong\pi_3(S^3)$ を得る.

同じ完全系列をさらに調べれば，$\pi_3(S^2)$ の生成元は Hopf ファイバー空間の射影 $S^3\to S^2$ により表わされることがわかる.

球面のホモトピー群に関する情報を集めておこう.

$\pi_i(S^n)$	$i=1$	2	3	4	5	6
$n=1$	$\mathbf{Z}$	0	0	0	0	0
2	0	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	?	?	?
			$\|$	$\|$	$\|$	$\|$
3	0	0	$\mathbf{Z}$	?	?	?
4	0	0	0	$\mathbf{Z}$	?	?

（各 $\pi_i(S^n)$ から $\pi_{i+1}(S^{n+1})$ へ Σ の矢印）

球面のホモトピー群の集合は，n が増加すると安定化する系列 $\{\pi_{n+i}(S^n)\}_{n=1}^{\infty}$ に分解することがわかる．この後，本書の終りで，最初のいくつかの安定群 $\pi_{n+i}(S^n)$ を決定する1つの方法を述べる.（実際，$i\leq 13$ について安定群 $\pi_{n+i}(S^n)$ を計算してみせる.）今のところ，この計算は難しすぎて，安定群 $\pi_{n+i}(S^n)$ は $i<0$ のとき零，$i=0$ のとき $\boldsymbol{Z}$，$i=1$ のとき巡回群であるといえるだけである.

積 $S^m\times S^n$ は4つの胞体 e^0, e^n, e^m, e^{m+n} をもつ CW 複体であり，胞体 e^{n+m} の特性写像 $f: D^{n+m}\to S^m\times S^n$ の球面 $\partial D^{n+m}=S^{n+m-1}\subset D^{n+m}$ への制限は写像 $S^{n+m-1}\to S^n\vee S^m$ である．この写像を $W(m,n)$ または単に W と表わす.

定義　$\alpha\in\pi_n(X)$, $\beta\in\pi_m(X)$ とする．球写像

$$S^{n+m-1}\xrightarrow{W}S^n\vee S^m\to X \quad (f\in\alpha \text{ on } S^n,\ g\in\beta \text{ on } S^m)$$

により表わされる $\pi_{n+m-1}(X)$ の元は α と β の **Whitehead 積**とよばれ，$[\alpha,\beta]$ と表わされる．

演習　次を証明せよ：

(1) $[\alpha,\beta]=(-1)^{\dim\alpha\cdot\dim\beta}[\beta,\alpha]$.

(2) $\alpha,\beta\in\pi_1(X)$ ならば，$[\alpha,\beta]=\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\in\pi_1(X)$.

(3) X が n 単純ならば，$\alpha\in\pi_1(X)$, $\beta\in\pi_n(X)$ に対して $[\alpha,\beta]=0$. 一般に，もし，$\alpha\in\pi_1(X)$, $\beta\in\pi_n(X)$, $n>1$ ならば，$[\alpha,\beta]=T_\alpha\beta-\beta$, ただし，$T_\alpha$ は α の $\pi_n(X)$ への作用を表わす（§6 参照）．

(4)
$$(-1)^{\dim\alpha\cdot\dim\gamma}[[\alpha,\beta],\gamma],+(-1)^{\dim\beta\cdot\dim\alpha}[[\beta,\gamma],\alpha]$$
$$+(-1)^{\dim\gamma\cdot\dim\beta}[[\gamma,\alpha],\beta]=0.$$

(5) X が H-空間ならば，$\alpha\in\pi_n(X)$, $\beta\in\pi_m(X)$ に対して $[\alpha,\beta]=0$.

(6) $\alpha\in\pi_n(X)$ と $\beta\in\pi_m(X)$ に対して，$\Sigma([\alpha,\beta])=0\in\pi_{m+n}(X)$.

（ヒント：次の図は，適当な写像 $S^{m+n}\to S^{m+n+1}$ を選べば可換になる：

$$\begin{array}{ccccc}
S^{m+n}=\Sigma(S^{m+n-1}) & \xrightarrow{\Sigma W(n,m)} & \Sigma(S^n\vee S^m) & \xrightarrow{\Sigma(f\vee g)} & \Sigma X\\
\downarrow & & & & \|\\
S^{m+n+1} & \xrightarrow{W(n+1,m+1)} & S^{n+1}\vee S^{m+1}=(\Sigma S^n)\vee(\Sigma S^m) & \xrightarrow{\Sigma f\vee\Sigma g} & \Sigma X
\end{array}$$

ここで，任意の写像 $S^{m+n}\to S^{m+n+1}$ はホモトピー的に自明であるから，これは命題を意味する．）

演習　任意の m,n について，空間 $\Sigma(S^n\times S^m)$ は $S^{n+1}\vee S^{m+1}\vee S^{n+m+1}$ にホモトピー同値であることを証明せよ．

（ヒント：この演習は前出のものに同値である．）

演習　$\pi_3(S^2)$ の元 $[\iota_2,\iota_2]$ は $\pi_3(S^2)\cong\boldsymbol{Z}$ の生成元の 2 倍に等しいことを示せ．ただし，ι_2 は $\pi_2(S^2)$ の標準的生成元である．

演習 (Freudenthal の定理の難しい部分)　全射準同型 $\Sigma:\pi_{4n-1}(S^{2n})\to\pi_{4n}(S^{2n+1})$ の核は元 $[\iota_{2n},\iota_{2n}]\in\pi_{4n-1}(S^{2n})$ により生成されることを証明せよ．ただし，ι_{2n} は群 $\pi_{2n}(S^{2n})$ の標準的生成元である．

最後の2つの演習は，$\pi_4(S^3)\cong \boldsymbol{Z}_2$ を意味する．したがって，$n\geq 3$ について $\pi_{n+1}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_2$ である．

§10. ホモトピー群とCW複体

胞体接着定理　X は空間，$f:S^{n-1}\to X$ は写像とする．このとき，射入 $g:X\to X\underset{f}{\cup}e^n$ の誘導する準同型 $g_*:\pi_i(X)\to\pi_i(X\underset{f}{\cup}e^n)$ は $i<n-1$ のとき同型，$i=n-1$ のとき全射である．この場合，その核は $[f]$ と $T_\gamma[f]$，ただし $\gamma\in\pi_1(X)$，という形の元で生成される．

群 $\pi_1(X)$ は $\pi_n(X)$ に次のように作用することを思いおこそう：$\alpha\in\pi_1(X)$ とし，α を表わすループを s とするとき，s は基点 $x_0\in X$ を x_0 に結ぶ道であるから，これは同型 $\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(X,x_0)$ を誘導し，$\beta\in\pi_n(X,x_0)$ を1つの元に写す．この元を定義により $T_\alpha\beta$ と表わす．ここで $T_\alpha\beta=\beta+[\alpha,\beta]$ であることを思いおこそう．さらに，この作用を用いた n 単純性のもう1つの定義($\Longleftrightarrow$ 任意の $\alpha\in\pi_1(X)$，$\beta\in\pi_n(X)$ に対して，$T_\alpha\beta=\beta$ のとき X は n 単純である)を思いおこそう．

胞体接着定理の証明　$i<n$ とし，任意の写像 $\varphi:S^i\to X\underset{f}{\cup}e^n$ が与えられているとする．胞体近似定理の証明と同様に，φ にホモトープで，その像が胞体 e^n 全体を覆いはしない写像 $\psi:S^i\to X\underset{f}{\cup}e^n$ が存在することを示そう．このとき，この像を境界に引張ることができる．すなわち，φ は S^i から X への写像にホモトープである．$i<n-1$ ならば，さらにもう1次元あるので，同じ議論は $S^i\times I\to X\underset{f}{\cup}e^n$ についても成り立つ．すなわち，そのような次元の2つの球写像を結ぶ任意のホモトピーは e^n と交わらないようにできる．以上により，定理は $i<n-1$ のとき成り立ち，準同型 $\pi_{n-1}(X)\to\pi_{n-1}(X\underset{f}{\cup}e^n)$ は全射であることがわかる．残っているのは，この準同型の核を表わすことだけである．この核は明らかに任意の元 $T_\gamma[f]$，$\gamma\in\pi_1(X)$，および，このような元の線型結合を含む．この核の任意の元がこのような形をしているという命題はそれほど明らかでないが，§4の定理4の2番目の部分と同様に証明できる．これは読者に任せたい．　(証明終)

系　YはCW複体Xの部分複体とする．差$X\backslash Y$が次元$\leq p$の胞体を含んでいないならば，射入により誘導される準同型$\pi_i(Y)\to\pi_i(X)$は$i<p$のとき同型，$i=p$のとき全射である．

系の系　任意のCW複体Xに対して$\pi_i(X)\cong\pi_i(X^{i+1})$である．ただし$X^{i+1}$は$X$の$(i+1)$切片を表わす．

定理　もし，CW複体XとYがそれぞれp連結，q連結ならば，

(1) $i<p+q-1$について$\pi_i(X\vee Y)\cong\pi_i(X\times Y)$である．

(2) 全射準同型$\pi_{p+q-1}(X\vee Y)\to\pi_{p+q-1}(X\times Y)$が存在する．特に$n>1$について$\pi_n(S^n\vee\cdots\vee S^n)\cong \boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}$である．

証明　§3で証明したように，唯1つの頂点をもち，かつ，それぞれ$1,\cdots,p-1$と$1,\cdots,q-1$の次元の胞体をもたないCW複体X'とY'が存在して，それぞれXとYにホモトピー同値となる．このとき，$X'\vee Y'$は$X\vee Y$にホモトピー同値であり，$X\times Y$にホモトピー同値な$X'\times Y'$に埋め込まれる．さらに，差$(X'\times Y')\backslash(X'\vee Y')$は次元$<p+q$の胞体をもたないので，胞体接着定理の系によれば，$i<p+q-1$のとき$\pi_i(X'\vee Y')\to\pi_i(X'\times Y')\cong\pi_i(X')\oplus\pi_i(Y')$は同型である．　（証明終）

注意　ここでは$\pi_i(X\vee Y)$と$\pi_i(X)\oplus\pi_i(Y)$の間の同型が述べられているばかりでなく，この同型が埋込み$X\vee Y\to X\times Y$により誘導されることに注意する．特に，群$\pi_n(S^n\vee\cdots\vee S^n)\cong\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}$は自然な埋め込み$S^n\to S^n\vee\cdots\vee S^n$の類により生成される．

CW複体の最初の自明でないホモトピー群の計算

$n>1$とし，連結なCW複体Kは，$i<n$のとき$\pi_i(K)=0$を満たすと仮定する．このとき，唯1つの頂点をもち次元$<n$の他の胞体はもたないCW複体K'が存在して$K'\simeq K$となるから，最初からKはこの条件を満たしているとしてよい．そこでKはn次元胞体σ_i^n, $i\in I$, と$(n+1)$次元胞体σ_j^{n+1}, $j\in J$, をもつと仮定しよう．σ_j^{n+1}の特性写像を$f_j^{n+1}: D^{n+1}\to K$とすると，写像$\varphi_j=f_j^{n+1}|_{S^n}: S^n\to K^n=\bigvee_{i\in I}S^n$は群$\pi_n(K^n)\cong\bigoplus_{i\in I}\boldsymbol{Z}$の元を表わす．

定理　群$\pi_n(K)$は$\pi_n(K^n)\cong\bigoplus_{i\in I}\boldsymbol{Z}$の元$[\varphi_j]\in\pi_n(K^n)$で生成される部分群による商群である．

あるいは，実際は適切とはいえないが，記憶するのにもっと便利な形でいう



と：$\pi_n(K)$ は生成元と関係式がそれぞれ n 次元と $(n+1)$ 次元の胞体に対応する可換群である．

証明はCW複体の基本群に関する定理のものと同様であり，主要な証明の段階は次の通りである．

(1) K への球写像は K^n への球写像にホモトープであるので，$\pi_n(K^n)$ の生成元として K の n 次元胞体の埋込みのホモトピー類 α_i, $i\in I$, をとることができる．

(2) 各 $\varphi_j: S^n\to K$ は $f_j^{n+1}: D^{n+1}\to K$ に拡張されるので，関係式 $[\varphi_j]=\sum a_{ij}\alpha_i=0$ は明らかに満たされる．

(3) 任意の関係式は $\sum a_{ij}\alpha_i=0$ に帰着される．

Whitehead の定理

定理　X と Y はCW複体とする．もし，写像 $f: X\to Y$ がホモトピー群の間の同型を誘導するならば，f はホモトピー同値である．

これは次のように言ってもよい：CW複体については弱ホモトピー同値と普通のホモトピー同値は同じである．

演習　上の2つの命題の同値性を証明せよ．

補題　すべての $i\leq n$ について $\pi_i(K,L)=0$ が成り立つ任意のCW対 (K,L) に対してホモトピー同値な対 (K',L') が存在し，すべての $i\leq n$ について K' の i 次元胞体は L' に属する．（ここで n は無限大でもよい．このとき，すべての i について $\pi_i(K,L)=0$ というのは $K\simeq L$ であることをこれは主張している．また同型 $\pi_1(K,L)=0$ は $\pi_1(K,L)$ が唯1つの元からなることを意味している.）

［補題 ⇒ 定理］の証明　K として f の写像柱，L として X を選ぶ．このとき，f と埋込み $L\subsetneq K$ はホモトピー群の間の同型を誘導する．対 (K,L) の完全系列を考えると，すべての i について $\pi_i(K,L)=0$ を得る．このとき，$n=\infty$ について補題を用いて $K\simeq L$，したがって，$X\simeq Y$ を得る．（証明終）

補題の証明　§3で与えられた「絶対的」な場合の定理の証明の方針に沿ってこれを証明することを読者に勧めるが，ここでもそれをやってみよう．

次の条件 (1)～(4) を満たす埋込みの系列



$$\begin{array}{ccccccccc} K & \subset & K_0 & \subset & K_1 & \subset & \cdots & \subset & K_n \\ \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\ L & \subset & L_0 & \subset & L_1 & \subset & \cdots & \subset & L_n \end{array}$$

を i に関する帰納法で構成する．

(1) 埋込み $K\subset K_0\subset K_1\subset\cdots$ と $L\subset L_0\subset L_1\subset\cdots$ はホモトピー同値である，

(2) 上の図は可換，

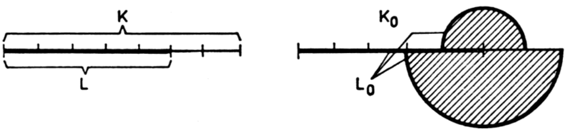
(3) 差 $K_i\backslash L_i$ は次元 $\leq i$ の胞体はもたない，

(4) $K_i\backslash K_{i-1}$ は次元 $i+1$ と $i+2$ の胞体のみから成る．

したがって，これを構成できれば $n<\infty$ について補題を得る．$n=\infty$ のときは，$K_\infty=\bigcup_i K_i$, $L_\infty=\bigcup_i L_i$ とおく．明らかに $K_\infty=L_\infty$ であり，埋込み $K\to K_\infty$ と $L\to L_\infty$ はホモトピー同値である．実際，埋込み $K_{i-1}\to K_i$ のホモトピー逆写像を $f_i: K_i\to K_{i-1}$ とすると，Borsuk の定理により $K_{i-1}\subset K_i$ 上では恒等写像と一致するように f_i を選べる．$f: K_\infty\to K$ を K_i 上では $f_0\circ f_1\circ\cdots\circ f_i$ と等しいものとして定義する．これは矛盾なく定義され，$K\to K_\infty$ のホモトピー逆元である．$L\to L_\infty$ のホモトピー逆元も同様に定義される．

埋込みの系列の構成

K_i と L_i およびそれまでに出てくる空間と写像はすでに定義されていると仮定する．このとき，L_i に含まれていない任意の $(i+1)$ 次元胞体 $e^{i+1}\subset K_i$ は (K_i, L_i) の $(i+1)$ 次元相対球写像（もちろん，胞体そのものではなくて，その特性写像）である．このような球写像は L_i に属する球写像にホモトープであり，さらに，このホモトピーは e^{i+1} の境界で定値であり，K_i の $(i+2)$ 切片内部でとれる．そのホモトピーの終りの球写像は（胞体近似定理により）L_i の $(i+1)$



切片に属する．このホモトピーは写像 $D^{i+2}\to K_i$ であり，これは（D^{i+2} は D^{i+3} の境界球面の下半球とみなして）D^{i+3} を K_i に接着するのに用いることができる．K_i に接着される新しい胞体は（上半球の内部と D^{i+3} の内部である）$(i+2)$

次元のものと $(i+3)$ 次元のものの2つある．この操作を L_i に属さない K_i の各 $(i+1)$ 次元胞体について繰り返し，その結果が複体 K_{i+1} であり，L_{i+1} としては L_i と K_i の $(i+1)$ 切片および新しい $(i+2)$ 次元胞体すべての和集合をとる．射入の関係

$$\begin{array}{ccc} K_i & \subset & K_{i+1} \\ \cup & & \cup \\ L_i & \subset & L_{i+1} \end{array}$$

は明らかであり，帰納法の仮定は満たされる．（証明終）

注意　Whitehead の定理により，ホモトピー群はある点では CW 複体のホモトピー型を完全に特徴づける．しかし，この定理を言葉通りにとってはいけない．2つの CW 複体のホモトピー群が一致してもホモトピー同値とは限らない．この同型が写像により誘導されることも必要である．例えば，すべての i について $\pi_i(S^2)\cong\pi_i(S^3\times CP^\infty)$ であるが，S^2 と $S^3\times CP^\infty$ はホモトピー同値な空間ではない．

演習　S^2 と $S^3\times CP^\infty$ はホモトピー同値でないことを証明せよ．

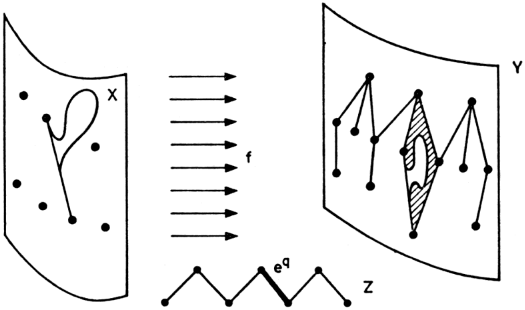
弱ホモトピー同値の概念の精密化

定理　連結な空間 X と Y の間にホモトピー群の同型を誘導する写像 f が存在するならば，X と Y は弱ホモトピー同値である．さらに，任意の CW 複体 Z に対して，写像 $f_*:[Z,X]\to[Z,Y]$ は一対一対応である．

証明　$\dim Z=0$ について定理は明らかに成立する．すなわち，この場合 $[Z,X]=[Z,Y]=*$ である．そこで定理は $\dim Z<q$ を満たす任意の Z に対して証明されたと仮定し，q 次元複体 Z を考える．まず最初に $f_*:[Z,X]\to[Z,Y]$ は全射であること，すなわち，任意の $\varphi:Z\to Y$ に対して $\psi:Z\to X$ が存在して $f\circ\psi\simeq\varphi$ となることを示す．帰納法の仮定により，$\psi':Z^{q-1}\to X$ が存在して $f\circ\psi'\simeq\varphi|_{Z^{q-1}}$ を満たす（ここでも Z^{q-1} は Z の $(q-1)$ 切片を表わす）．$f\circ\psi'$ と $\varphi|_{Z^{q-1}}$ を結ぶホモトピー $\Phi:Z^{q-1}\times I\to Y$ を固定する．$e^q\subset Z$ は q 次元胞体，$\alpha:D^q\to Z$ はその特性写像とする．写像 $\varphi\circ\alpha|_{S^{q-1}}:S^{q-1}\to Y$ は（$\varphi\circ\alpha:D^q\to Y$ に拡張されるので）零ホモトープである．したがって，（$f_*:\pi_{q-1}(X)\to\pi_{q-1}(Y)$ は単射であるから）$\psi'\circ\alpha|_{S^{q-1}}:S^{q-1}\to X$ も次ページの可換な図により零ホモトープであり，それは $\beta:D^q\to X$ に拡張できる．しか

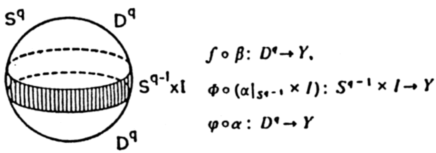
$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\varphi\circ\alpha|_{S^{q-1}}} & Y \\ S^{q-1} & & \uparrow f \\ & \xrightarrow{\psi'\circ\alpha|_{S^{q-1}}} & X \end{array}$$

し，写像βは一意的ではなく，それは適当にq次元球写像を付け加えて定まる．



さて$S^q=D^q\cup S^{q-1}\times I\cup D^q$と考えて

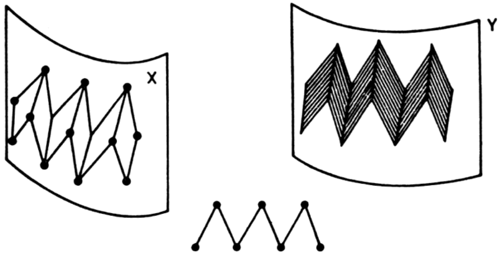
$$F: S^q\to Y \Longleftrightarrow \begin{cases} f\circ\beta: D^q\to Y \\ \Phi\circ(\alpha|_{S^{q-1}}\times I): S^{q-1}\times I\to Y \\ \varphi\circ\alpha: D^q\to Y \end{cases}$$



と定義される球写像Fを考えよう．$f_*:\pi_q(X)\to\pi_q(Y)$は全射であるから，この球写像FはXのある球写像の像にホモトープである．これをβの代わりに代入してFをYで零ホモトープにでき，したがって，これを$\gamma: D^{q+1}\to Y$に拡張できる．（改良された変形である）$\beta: D^q\to X$と$\gamma: D^{q+1}\to Y$に類似な写像はついですべての胞体に対して定義され，これらは$\psi': Z^{q-1}\to X$を$\psi: Z\to X$に拡張するのに適用される．（e^q上ではψは対応する写像βのD^qの内部への制限として定義される．）同様に，$\Phi: Z^{q-1}\times I\to Y$は$f\circ\psi$と$\varphi$を結ぶホモト

ピー $\Psi: Z\times I\to Y$ に拡張される．($e^q\times(0,1)$ 上では写像 Ψ は対応する γ の Int D^{q+1} への制限として与えられる．）このようにして $f\circ\psi\simeq\varphi$ を満たす $\psi: Z\to X$ を得る．すなわち，f_* は全射である．

次に，f_* が単射であること，すなわち，任意の組 $\psi_1,\psi_2: Z\to X$ に対して $f\circ\psi_1\simeq f\circ\psi_2$ は $\psi_1\simeq\psi_2$ を意味することを示す．帰納法の仮定により，$\psi_1|_{Z^{q-1}}\simeq\psi_2|_{Z^{q-1}}$ とする．さらに，$f\circ\psi_1$ と $f\circ\psi_2$ を結ぶホモトピー $\Phi: Z\times$



$I\to Y$ が与えられたとき，$Z\times\{0\}$ 上で ψ_1 と，$Z\times\{1\}$ 上で ψ_2 と一致し，f との合成が Φ の $(Z\times\{0\})\cup(Z^{q-1}\times I)\cup(Z\times\{1\})$ への制限とホモトープとなる写像 $\psi': (Z\times\{0\})\cup(Z^{q-1}\times I)\cup(Z\times\{1\})\to X$ を構成できたとする．(上と同様に，拡張は各 q 次元胞体で独立に行なわれること，および1つの q 次元胞体ではすでにその拡張が与えられていれば，それを変える必要はないことに注意すれば)，$f_*: \pi_q(X)\to\pi_q(Y)$ が単射であるので，ψ' は $\Psi: Z\times I\to X$ に拡張できる．これで ψ_1 と ψ_2 を結ぶホモトピーを得たことになる．

このように，$f_*: [Z,X]\to[Z,Y]$ は任意の有限次元の Z に対して一対一対応である．無限次元の Z の場合には切片に関する通常の帰納法による．

(証明終)

位相空間の胞体近似

定理　任意の位相空間に対して，弱ホモトピー同値な CW 複体が存在する．

証明　空間 X は連結であると仮定する．(さもなければ構成は各成分について繰り返せばよい．) K_0 は1点から成る空間とし，すでに CW 複体 $K_1,\cdots,K_i$ が存在して，埋込み $K_0\subset K_1\subset\cdots\subset K_i$ を満たし，さらに次元 $<i$ のホモトピー

群の間の同型と，次元 i における全射を誘導する写像 $f_i: K_i \to X$ があると仮定する．$\xi_\alpha \in \pi_i(K_i)$, $\alpha \in A$ は Ker $\{(f_i)_*: \pi_i(K_i) \to \pi_i(X)\}$ の生成元，η_β, $\beta \in B$, は $\pi_{i+1}(X)$ の生成元とし，これらの元を表わす球写像をそれぞれ $\tilde{\xi}_\alpha: S^i \to K_i$ と $\tilde{\eta}_\beta: S^{i+1} \to X$ とする．

各 $\tilde{\xi}_\alpha$ に沿って $(i+1)$ 次元球体を K_i に接着し，得られた空間と B の元で添字のついた球面 S^{i+1} の一点和との和集合を K_{i+1} で表わす：$K_{i+1} = K_i \bigcup_{\alpha \in A} e_\alpha^{i+1} \bigvee_{\beta \in B} S_\beta^{i+1}$．次に，$K_i$ 上では f_i，一点和の β 番目の $(i+1)$ 次元球面上では $\tilde{\eta}_\beta$，写像 $\tilde{\xi}_\alpha$ に沿って接着された球体上では $f_i \circ \tilde{\xi}_\alpha: S^i \to X$ の拡張 $\zeta_\alpha: D^{i+1} \to X$ と一致するものとして写像 $f_{i+1}: K_{i+1} \to X$ を定義する．（ここで，この拡張の存在は Ker $(f_i)_*$ の元として ξ_α を選んだことからわかる．）明らかに f_{i+1} は次元 $\leq i$ のホモトピー群の同型と次元 $i+1$ の全射を誘導する．

帰納法により，各 i について複体 K_i と射入 $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_i$ および写像 $f_i: K_i \to X$ が得られ，各 f_i は f_{i-1} の拡張になっている．さらに，f_i は i より小さい次元のホモトピー群の同型と次元 i の全射を誘導する．

$K = \bigcup_i K_i$ とおき，$f: K \to X$ を K_i 上で f_i と一致するものとして定義する．このとき K はその切片として空間 K_i をもつ CW 複体であり，f はホモトピー群の同型を誘導する．したがって，K と X は弱ホモトピー同値な空間である．

（証明終）

Eilenberg-MacLane 複体

§2で予告したように，任意の自然数 n と群 π（$n>1$ のときは可換）に対して，i 次ホモトピー群が，$i \neq n$ ならば零，$i=n$ ならば π である空間が存在する．このようなCW複体を任意の π と n に対して構成する準備ができた．

$\{\alpha_i\}_{i \in J}$ は群 π における生成元系とする．J の元で添字のついた n 次元球面の一点和を $K_n = \bigvee_{i \in J} S_i^n$, $S_i^n = S^n$, と表わす．このとき，すべての $i<n$ について $\pi_i(K_n)=0$ である．さて $\pi_n(K_n)$ は $n>1$ のとき生成元系 J をもつ自由可換群，$n=1$ のときは自由群である．$\{\sum k_{ij}\alpha_i = 0\}_{j \in J}$ を π における関係式の生成元系とする．（$n>1$ については，元 α_i は可換であると仮定してよい．したがって，$\alpha_i + \alpha_j = \alpha_j + \alpha_i$ という形の関係式は考慮しなくてよい．$n=1$ の場合，J は生成する関係式の完全な集合でなければならない．）$\sum k_{ij} S_i^n$ に等しい球写像を η_j で表わす．（ただし，ここで使われている記号は完全に正確とはいえない：S_i^n は

K_n への球写像を表わしている.）各写像 $\eta_j : S^n \to K_n$ に沿って K_n に $(n+1)$ 次元球体を接着する．胞体接着定理により，得られた空間 K_{n+1} について，$i<n$ ならば $\pi_i(K_{n+1})=0$，$i=n$ ならば $\pi_n(K_n)=\pi$ である．次に，$\pi_{n+1}(K_{n+1})$ の生成元の任意の集合を表わす各 $(n+1)$ 次元球写像に沿って，$(n+2)$ 次元球体を K_{n+1} に接着する．このとき，$i<n$ または $i=n+1$ について $\pi_i(K_{n+2})=0$ かつ $\pi_n(K_{n+2})=\pi$ を満たす空間 K_{n+2} を得る．次に，次元 $n+3$ の球体で $\pi_{n+2}(K_{n+2})$ を消去する．以下，これを続ける．このようにして得られた空間の列 $K_1, K_2, \cdots$ の極限空間 K はすべての次元で前述したホモトピー群をもつ．

定義　$\pi_i(K)=\begin{cases}0 & i\neq n \text{ のとき} \\ \pi & i=n \text{ のとき}\end{cases}$

を満たす空間 K は，**Eilenberg–MacLane 空間**（または，複体のときは **Eilenberg–MacLane 複体**），**$K(\pi, n)$ 型の空間**（または**複体**）あるいは単に **$K(\pi, n)$ 空間**とよび，$K(\pi, n)$ と書き表わす．

演習　$K(\pi, n)$ 型の任意の2つの空間は弱ホモトピー同値であることを証明せよ．

コメント　この命題は第II章において証明され，今後しばしば引用されるであろう．これは，空間の弱ホモトピー同値性がホモトピー群の単なる同型から出るという点で，上において定式化された一般法則の例外である．

★演習　次を証明せよ：

(1) $K(\pi', n)\times K(\pi'', n)=K(\pi'\times\pi'', n)$

(2) $\Omega K(\pi, n)=K(\pi, n-1)$

★演習　次を証明せよ：

(1) 円 S^1 は $K(\boldsymbol{Z}, 1)$ 空間である．

(2) 無限次元実射影空間 $\boldsymbol{R}P^\infty$ は $K(\boldsymbol{Z}_2, 1)$ 空間である．

(3) 無限次元複素射影空間 $\boldsymbol{C}P^\infty$ は $K(\boldsymbol{Z}, 2)$ 空間である．

(4) 無限次元レンズ空間 $L_m^\infty=S^\infty/\boldsymbol{Z}_m$ は $K(\boldsymbol{Z}_m, 1)$ 空間である．ただし，S^∞ は $\sum|z_i|^2=1$ を満たし，有限個の元を除いてすべて零である複素数の無限列 $(z_1, z_2, \cdots)$ の集合であり，$\boldsymbol{Z}_m$ の生成元は対応

$$(z_1, z_2, \cdots)\longmapsto(z_1e^{2\pi i/m}, z_2e^{2\pi i/m}, \cdots)$$

により S^∞ に作用する．

注意　有限生成可換群πをもつすべての「良い」$K(\pi, n)$ 空間の一覧表は，実際，上述の演習の例とそれらの積により尽くされる．

★演習　任意の1次元CW複体は$K(\pi, 1)$ 空間であることを証明せよ．ただし，πは自由群である．

演習 (V. I. Arnold)　相異なる複素数$z_1, \cdots, z_n$をもつすべての点$(z_1, \cdots, z_n) \in \boldsymbol{C}^n$の集合は，ある群$\pi$をもつ$K(\pi, 1)$ 空間であることを証明せよ．

演習　S^3における区分的に滑らかな曲線の補空間は，ある群πをもつ$K(\pi, 1)$ 空間であることを証明せよ．



第Ⅱ章　ホモロジー

さて，ホモトピー群の次に，位相空間に附随しているもう1つの型の系列——ホモロジー群とコホモロジー群——を考察する．ホモトピー群と比較して，これらの群は（実際に基本的な空間例で直ちに容易にわかるように）より簡単に計算でき，（例えばホモロジー群の場合には，$\pi_3(S^2)\cong \boldsymbol{Z}$ のような不可解な事実には出くわさないように）より透明な幾何学的内容をもつという重要な利点をもつと同時に，その正確な定義はかなりの量の形式的な複雑さを含むという重大な不便さをもっている．単連結な空間 X については，ホモロジー群によりもたらされる情報はおおまかに言って，ホモトピー群に含まれているものと同じである．

ホモロジー群の幾何学的なアイディアは次の通りである．球写像は輪体で置き換えられ，k 次元輪体は k 次元の向き付けられた曲面（球面か他の何か，例えば輪環面）である．ホモトピー群の関係式はホモロジー群の関係式で置き換えられる——例えば k 次元輪体は $(k+1)$ 次元曲面の1つの境界をなすとき零ホモローグである．

輪体（およびこれらの輪体で囲まれる鎖とよばれるもの）の概念をいかに正確に定義できるか？　これらをある標準的な対象（球面か何か他のもの）からの写像として定義しようとしてもいいかもしれないが，これは非常に難しいことがわかるであろう．（1次元や2次元では何とかなるが，それ以後いかに拡張していくことができるのだろうか？）実は，鎖や輪体を標準的な元（「煉瓦」）の和集合として定義するほうがもっと簡単である．このために，特異単体という概念を導入する．

§11. 特異ホモロジー

特異単体

q 次元**標準単体** Δ^q とは，集合 $\{(t_0, \cdots, t_q)\in \boldsymbol{R}^{q+1} | t_i\geq 0$ かつ $t_0+t_1+\cdots+t_q=1\}$ であることを思いおこす．明らかに Δ^0 は1点，Δ^1 は線分，Δ^2 は3角形，Δ^3 は4面体である．q 単体 Δ^q は $(q+1)$ 個の $(q-1)$ 面 $\Delta_0^{q-1}, \cdots, \Delta_q^{q-1}$ をもつ．ただし，Δ_i^{q-1} は方程式 $t_i=0$ で定義される．

X は位相空間とする．X の q 次元**特異単体**とは Δ^q から X への連続写像である．

鎖

空間 X の q 次元**鎖**（**特異鎖**）とは定義により X の特異単体の整係数の形式的な（有限）線型結合である．

X の q 次元特異鎖の集合は $C_q(X)$ で表わされる．線型結合としての鎖の和により $C_q(X)$ は可換群になる．明らかに，$C_q(X)$ は生成元が特異単体である自由可換群である．

境界作用素

次に，作用素 $\partial_q : C_q(X)\to C_{q-1}(X)$ を定義する．$C_q(X)$ は自由であるから，∂_q を各特異単体 f^q の上で与えれば十分である．$\partial_q(f^q)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i f_i^{q-1}$ とおく．ただし，$f_i^{q-1}=f^q|_{\Delta_i^{q-1}}$ は標準単体 Δ^q の i 次面 Δ_i^{q-1} への制限である．Δ_i^{q-1} は標準的に Δ^{q-1} と同一視され，したがって $(t_0, \cdots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \cdots, t_q)\in\Delta_i^{q-1}\subset\Delta^q$ は $(t_0, \cdots, t_{i-1}, t_{i+1}, \cdots, t_q)\in\Delta^{q-1}$ に対応する．容易にわかるように，$\partial_q\circ\partial_{q+1}=0$，すなわち $\operatorname{Ker}\partial_{q+1}\supset\operatorname{Im}\partial_q$ である．

ホモロジー群

群 $H_q(X)=\operatorname{Ker}\partial_q/\operatorname{Im}\partial_{q+1}$ は X の q 次（または q 次元）**ホモロジー群**とよばれ，$\operatorname{Im}\partial_{q+1}\subset C_q(X)$ に属する鎖は q 次（または q 次元）**境界輪体**とよばれる．$C_q(X)$ の部分群 $\operatorname{Im}\partial_{q+1}$ は q 次（または q 次元）**境界輪体群**といわれ，$B_q(X)$ と表わされる．

部分群 $\operatorname{Ker}\partial_q$ に属する $C_q(X)$ の鎖は，q 次（または q 次元）**輪体**とよばれ

る．$C_q(X)$ の部分群 $\mathrm{Ker}\,\partial_q$ は q 次（または q 次元）**輪体群**といわれ，これを $Z_q(X)$ と表わす．したがって $H_q(X)=Z_q(X)/B_q(X)$ である．輪体 z_q は $z_q\in B_q(X)$ のとき，すなわち鎖 c_{q+1} があって $\partial c_{q+1}=z_q$ のとき，**零ホモローグ**であるといい，$z_q\sim 0$ と表わす．同様に2つの輪体 z_q^1 と z_q^2 は輪体 $z_q^1-z_q^2$ が零ホモローグのとき，**ホモローグ**とよび，$z_q^1\sim z_q^2$ と表わす．

もし，$H_q(X)$ が有限生成ならば，次の形であることはよく知られている：

$$H_q(X)=\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\oplus(\oplus\boldsymbol{Z}_{k_j}),$$

ただし，$\boldsymbol{Z}_{k_j}$ は位数 k_j の巡回群で，k_j は $j<m$ ならば k_m で割り切れる．

$H_q(X)$ の分解における項 $\boldsymbol{Z}$ の個数は X の q 次（または q 次元）**Betti 数**，$k_1, k_2, \cdots$ は X の q 次（または q 次元）**torsion 数**といわれる．

鎖 複 体

鎖複体とは可換群の準同型の列

$$\cdots\longrightarrow C_k\xrightarrow{\partial_k}C_{k-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_2\xrightarrow{\partial_2}C_1\xrightarrow{\partial_1}C_0\xrightarrow{\varepsilon}\boldsymbol{Z}$$

で，$\partial_q\circ\partial_{q+1}=0$ および $\varepsilon\circ\partial_1=0$ を満たすものである．明らかに，$\mathrm{Im}\,\partial_{k-1}\subset\mathrm{Ker}\,\partial_k$ が成立する．$\mathrm{Ker}\,\partial_k/\mathrm{Im}\,\partial_{k-1}$ を鎖複体の q 次(または q 次元)**ホモロジー群**とよぶ．ε は零次元ホモロジー群から $\boldsymbol{Z}$ の上への全射を定義することもわかる．

X が任意の空間ならば，$C_q(X)$ と準同型 ∂_q および次に定義する ε は鎖複体をなす．これは X の**特異複体**とよばれ，$C(X)$ と表わされる．準同型 ε は次のように定義される：零次元鎖 $c_0=\sum k_i f_i^0$ に対して，$\varepsilon(c_0)=\varepsilon(\sum k_i f_i^0)=\sum k_i\in\boldsymbol{Z}$ とおく．ここで $\sum k_i$ は零次元鎖の**指数**とよばれる．

演習　$\varepsilon\circ\partial_1=0$ であること，さらに，X が弧状連結ならば $\mathrm{Ker}\,\varepsilon=\mathrm{Im}\,\partial_1$ であることを確かめよ．

鎖 写 像

2つの鎖複体 C' と C'' が与えられているとする．C' から C'' への**鎖写像**を次の図

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\longrightarrow & C_2' & \xrightarrow{\partial_2'} & C_1' & \xrightarrow{\partial_1'} & C_0' & \xrightarrow{\varepsilon'} & \boldsymbol{Z} & \longrightarrow 0\\
 & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_0} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} & \\
\cdots\longrightarrow & C_2'' & \xrightarrow{\partial_2''} & C_1'' & \xrightarrow{\partial_1''} & C_0'' & \xrightarrow{\varepsilon''} & \boldsymbol{Z} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

が可換である，すなわち，すべての k について $\varphi_{k-1}\circ\partial'_k=\partial''_k\circ\varphi_k$ かつ $\varepsilon''\circ\varphi_0=\varepsilon'$ を満たす準同型 $\varphi_k: C'_k\to C''_k$ の族として定義する．C' から C'' への任意の鎖写像は対応するホモロジー群の間の写像を誘導する．

X, Y は位相空間，$g: X\to Y$ は写像とする．このとき g は（合成により）準同型の族 $g_k: C_k(X)\to C_k(Y)$ を誘導し，$\{g_k\}$ は $C'=C(X)$ から $C''=C(Y)$ への鎖写像である．このことより $g: X\to Y$ は X と Y のホモロジー群の間の準同型 $g_*=g_{k*}: H_k(X)\to H_k(Y)$ を誘導する．ここで次のことに注意する：

(a)　$g: X_1\to X_2$ および $h: X_2\to X_3$ ならば，$(h\circ g)_*=h_*\circ g_*$.

(b)　$\mathrm{id}\,X: X\to X$ が恒等写像ならば，$(\mathrm{id}\,X)_*: H_k(X)\to H_k(X)$ は任意の k について恒等写像である．

これは直ちにホモロジー群が位相不変量であること，すなわち，空間 X と Y が同相ならば，それらのホモロジー群は同型であることを意味する．

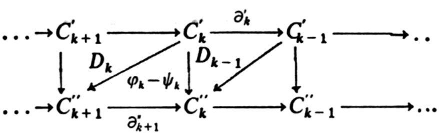
他のホモロジー論を既知の読者は，ここで紹介している特異ホモロジー論では位相不変量の定理は定義の直接結果であるが，一方他の理論においては，これは長くむしろ複雑な議論の結果であることに気がつくであろう．

鎖ホモトピー

再び C' と C'' は鎖複体と仮定し，$\varphi=\{\varphi_k\}: C'\to C''$ と $\psi=\{\psi_k\}: C'\to C''$ は鎖写像とする．φ と ψ の間の**鎖ホモトピー**とは任意の k について

$$D_{k-1}\circ\partial'_k+\partial''_{k+1}\circ D_k=\varphi_k-\psi_k$$

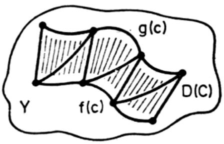
を満たす（すなわち，次の図がある特別な可換性をもつ）準同型 $D_k: C'_k\to C''_{k+1}$

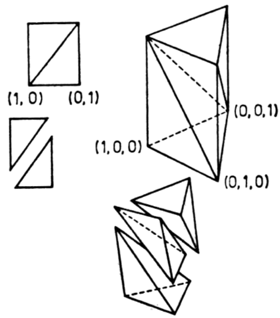


の族 $\{D_k\}$ である．鎖ホモトピーで結ばれる鎖写像は（**鎖**）**ホモトープ**であるといわれる．

ホモトープな鎖写像はホモロジー群の間の同一の写像を誘導する：もし，$\alpha\in C'_k$ かつ $\partial'_k\alpha=0$ ならば，$\varphi_k(\alpha)-\psi_k(\alpha)=D_{k-1}(\partial'_k\alpha)-\partial''_{k+1}(D_k\alpha)=-\partial''_{k+1}(D_k\alpha)\in\mathrm{Im}\,\partial''_{k+1}$ である．

「鎖ホモトピー」という用語の由来を説明しよう．$f, g: X \to Y$ が空間の間のホモトープな写像ならば，f と g により誘導される鎖写像はホモトープである．実際，f と g を結ぶホモトピー $F: X\times I \to Y$ を固定しよう．任意の単体 $\varphi: \Delta^q \to X$ に対して写像 $F\circ(\varphi\times I): \Delta^q\times I\to Y$ が定義される．柱 $\Delta^q\times I$ は単体 $\Delta_i^{q+1}(i=0,1,\cdots,q)$ に分割できる．(このような分割は $q=2,3$ の場合は次図で示





されている．一般の場合は，$\Delta_i^{q+1}=\{(t_0,\cdots,t_q,\tau)\mid t_0+\cdots+t_{i-1}\leq\tau\leq t_0+\cdots+t_i\}$ により定義できる．) 明らかに，Δ_i^{q+1} は頂点 $(v_0,0),\cdots,(v_i,0),(v_i,1),\cdots,(v_{q+1},1)$ をもつ単体である．ただし，$(v_0,\cdots,v_{q+1})$ は Δ^q の頂点である．Δ_i^{q+1} を任意の向きを保つ同相写像で標準単体 Δ^{q+1} と同一視する．したがって，写像 $F\circ(\varphi\times I)$ は $(q+1)$ 個の $(q+1)$ 次元特異単体 $\psi_0,\cdots,\psi_q$ を定義する．和 $\sum\psi_i$ を $D_q(\varphi)$ で表わし，$D_q(\sum k_i\varphi_i)=\sum k_iD_q(\varphi_i)$ とする．$\{D_q\}$ が f と g を結ぶ鎖ホモトピーであることを確かめるのは難しくはない．

以上により，空間の間のホモトープな写像はホモロジー群の間の同一の準同型を誘導することが結果としてわかる．

系　ホモトピー同値な空間は同型なホモロジー群をもつ．さらに，ホモトピー同値写像はホモロジー同型を誘導する．

1点のホモロジー群

$X=*$ と仮定する．このとき唯1つの特異単体は $f^r: \Delta^r\to *$ という形をもつものであり，したがって，$C_r(*)\cong\boldsymbol{Z}$ である．さて，$\partial f^r=\sum(-1)^i f_i^{r-1}=[\sum$

$(-1)^i]f^{r-1}$ であるから,

$$\partial f^r = \begin{cases} 0 & r=2p+1, r=0 \text{ のとき} \\ f^{r-1} & r=2p \text{ のとき} \end{cases}$$

したがって, $H_0(*)\cong \boldsymbol{Z}$ および $k>0$ について $H_k(*)=0$ である. (k が奇数ならば $B_k(*)\cong \boldsymbol{Z}_k(*)\cong \boldsymbol{Z}$; k が偶数ならば, $B_k(*)=\boldsymbol{Z}_k(*)=0$.)

零次元ホモロジー群

X が弧状連結ならば, $H_0(X)\cong \boldsymbol{Z}$ であり, さらに, $\varepsilon: H_0(X)\to \boldsymbol{Z}$ は同型である. 実際, 任意の零次元鎖は輪体でもある : $C_0(X)=Z_0(X)$. 任意の零次元鎖 $c=\sum k_i\varphi_i$ が与えられたとする. これに, 任意の 0 次元単体 φ_0 をもつ鎖 $d=\sum k_i(\varphi_i-\varphi_0)$ を加えることにより 1 つの点に集中した鎖を得る. なぜならば, X は弧状連結であり, $\varphi_i-\varphi_0$ は境界輪体であり, したがって d も境界輪体である. さらに, すべての零次元単体はホモローグであるから, したがって $H_0(X)\cong \boldsymbol{Z}$ を得る. ε は全射であるから, ε が同型であることは明らかである.

同様に, I が X の弧状連結成分の集合ならば, $H_0(X)\cong \bigoplus_{i\in I} \boldsymbol{Z}$ を得る.

★演習　$f: X\to Y$ が弧状連結空間の間の写像であるとき, $f_*: H_0(X)\to H_0(Y)$ は同型であることを証明せよ.

相対ホモロジー群

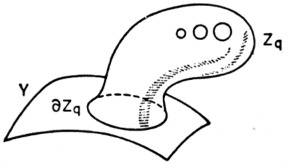
$X\supset Y$ は位相空間の対とする. このとき, $C_q(Y)\subset C_q(X)$ であり, 商群 $C_q(X, Y)=C_q(X)/C_q(Y)$ を考えることができる. このとき射入 $C_q(Y)\subset C_q(X)$ は境界作用素 $\partial_q: C_q(X)\to C_{q-1}(X)$ および $\partial_q: C_q(Y)\to C_{q-1}(Y)$ と両立し, したがって, 作用素 $C_q(X, Y)\to C_{q-1}(X, Y)$ を得る. これを同じ文字 ∂_q で表わす. さて, $\operatorname{Ker}\partial_q=Z_q(X, Y)\supset \operatorname{Im}\partial_{q+1}=B_q(X, Y)$ であるから, 群 $H_q(X, Y)=Z_q(X, Y)/B_q(X, Y)$ が得られ, これは $X \bmod Y$ の q 次元**相対ホモロジー群**とよばれる. 相対ホモロジー群について, 関手的性質, 位相不変性, ホモトピー不変性が成り立つ.

ホモロジー群における境界準同型 ∂_*

さて, $H_q(X, Y)$ を $H_{q-1}(Y)$ に写す新しい境界準同型 ∂_* を構成する.

相対輪体 $z_q\in C_q(X, Y)$ は $\tilde{z}_q\in C_q(X)$ により表わされるとする. $\partial_q z_q=0$ よ

り $\partial_q \tilde{z}_q \in C_{q-1}(Y)$ がわかる．（絶対）輪体 $\partial_q \tilde{z}_q$ のホモロジー類は明らかに z_q の選び方に無関係であり，したがって，**境界準同型** $\partial : H_q(X, Y) \to H_{q-1}(Y) \Leftrightarrow \partial\{z_q\} = \{\partial_q \tilde{z}_q\}$ が得られる．



対と3対のホモロジー系列

$i : Y \subset X$ は射入とする．これは $i_* : H_{q-1}(Y) \to H_{q-1}(X)$ を誘導する．任意の絶対輪体は相対輪体とみなしてよいから，準同型 $\pi : H_{q-1}(X) \to H_{q-1}(X, Y)$ を得る．

定理　次の系列は完全である：

$$\cdots \to H_q(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(Y) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(X) \xrightarrow{\pi} H_{q-1}(X, Y) \to \cdots$$

これを証明するには，対応する核と像が一致するという自明な事実を確認すればよい．ところで，連結な X と Y については $H_0(X, Y) = 0$ であることに注意する．一般に，X の各成分が Y の1点を含むならば $H_0(X, Y) = 0$ である．

★演習　X の任意の点 x_0 に対して，$q > 0$ のとき $H_q(X) = H_q(X, x_0)$ であることを証明せよ．

3対のホモロジー系列は対の完全系列の変形である．これは，3対 (X, Y, Z)，ただし $X \supset Y \supset Z$，に対して定義され，次の形をもつ：

$$\cdots \to H_q(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(Y, Z) \to H_{q-1}(X, Z) \to H_{q-1}(X, Y) \to \cdots$$

ただし，∂ は上述の $\partial : H_q(X, Y) \to H_{q-1}(Y)$ および上述の π と同様な準同型 $H_{q-1}(Y) \to H_{q-1}(Y, Z)$ との合成であり，残りの準同型は対の射入 $(Y, Z) \to (X, Z)$ および $(X, Z) \to (X, Y)$ から誘導されたものである．

演習　3対のホモロジー系列の完全性を確かめよ．

絶対ホモロジー群と相対ホモロジー群の間の関連性

結局，相対ホモロジー群はある意味で絶対ホモロジー群に帰着されることがわかる．すなわち，

定理　任意の CW 対 (X, Y) に対して，$q \neq 0$ のとき $H_q(X, Y) \cong H_q(X/Y)$ である．

注意　類似な同型はホモトピー群の場合には正しくない．例えば，$\pi_q(D^2, S^1) \ncong \pi_q(D^2/S^1)$ である．

Y 上の錐を CY で表わす．これは，$Y \times I$ の上面を 1 点に縮めて得られる．$X \cup CY$ を考えよう．X と Y が CW 複体ならば $X \cup CY \simeq X/Y$ であるから，証明すべき命題は $q \neq 0$ のとき $H_q(X, Y) \cong H_q(X \cup CY)$ である．$q>0$ について $H_q(X \cup CY, *) = H_q(X \cup CY)$ を思いおこすと，$*$ を錐の頂点とするとき，任意の複体 X と部分複体 Y に対して，$H_q(X, Y) \cong H_q(X \cup CY, *)$ を証明すれば十分である．

$\varphi : \Delta^q \to V$ は空間 V の特異単体とする．$\beta\varphi$ により Δ^q の重心細分の q 次元単体に φ を制限して得られる特異単体の和として定義される鎖を表わすことにする．任意の q 次元鎖 $c = \sum k_i \varphi_i \in C_q(X)$ に対して $\beta c = \sum k_i \beta\varphi_i$ とおくと，対応 $c \longmapsto \beta c$ は明らかに準同型 $\beta_q : C_q(X) \to C_q(X)$ を定義する．



補題　族 $\{\beta_q : C_q(X) \to C_q(X)\}_q$ は複体 $\{C_q(X)\}_q$ からそれ自身への鎖写像であり，これは恒等写像にホモトープである．

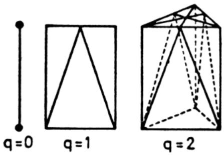
補題の前半はほとんど明らかであるので読者に証明を任せる．$\{\beta_q\}$ を恒等写像に結ぶ鎖ホモトピーは次のように構成される．任意の $q \geq 0$ について，$\Delta^q \times I$ の 3 角形分割を次を満たすように定義する：

(i)　柱 $\Delta^q \times I$ の底面は標準単体として 3 角形分割する．

(ii)　積 $\Delta_i^{q-1} \times I \subset \Delta^q \times I$（ただし Δ_i^{q-1} は面）は $\Delta^{q-1} \times I$ として 3 角形分割される複体 $\Delta^q \times I$ の単体部分複体である．

(iii)　柱の上面は標準単体の重心細分として 3 角形分割する．

このような 3 角形分割は帰納法により構成できる．$q=0$ については次の絵で



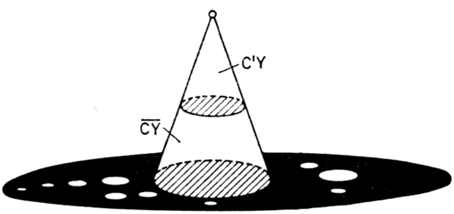
示したように定義する．$q<k$ についてはすでに定義されたと仮定しよう．$(\Delta^q\times 0)\cup(\partial\Delta^q\times I)\subset\Delta^q\times I$ を，$\Delta^q=\Delta^q\times 0$ では標準的３角形分割であり，$\partial\Delta^q\times I$ ではすでに構成されたものと一致するように３角形分割する．つぎに，$\Delta^q\times I$ を，底面は３角形分割 $(\Delta^q\times 0)\cup(\partial\Delta^q\times I)$ の単体であり，共通の頂点は上面の中心であるピラミッド状に分割する．

$\varphi:\Delta^q\to X$ は特異単体とする．$D(\varphi)\in C_{q+1}(X)$ は，$\Phi:\Delta^q\times I\to X\Leftrightarrow\Phi(y,t)=\varphi(y)$ を上の $\Delta^q\times I$ の３角形分割の単体に制限することにより得られるすべての $(q+1)$ 次元単体の和を表わすことにする．このとき $D:C_q(X)\to C_{q+1}(X)$ が補題を満たす鎖ホモトピーである．

演習　これを確かめよ．

定理の証明　埋込み $(X,Y)\to(X\cup CY,CY)$ を考える．錐 CY はその頂点に可縮である $(CY\simeq *)$ から，この写像は準同型 $H_q(X,Y)\to H_q(X\cup CY,CY)=H_q(X\cup CY,*)$ を誘導する．

これが全射準同型であることを示す．$z\in Z_q(X\cup CY,CY)$ は輪体とする．この z に対して，上の準同型による像が z とホモローグな輪体を $Z_q(X,Y)$ に見つけなければならない．今，CY を高さ 1/2 の所で２片に分割して，錐 $C'Y$ と切りつめた錐 $\overline{CY}$ を得る：



補題により，z は，$C'Y$ と交わるものはすべて CY に必然的に属するほど小さ

い単体をもつ z にホモローグな輪体 z' でおきかえてよい．この z' から $C'Y$ と交わる単体を取り去る．この操作は CY の内部で行なわれるから，$z \bmod CY$ のホモロジー類を変えることはなく，相対輪体 $z'' \bmod CY$ を得る．一方，ホモロジー群のホモトピー不変性により $H_q(X, Y) \cong H_q(X \cup \overline{CY}, \overline{CY})$ である．したがって，$X \bmod Y$ に相対輪体が存在して，同型により $X \cup \overline{CY} \bmod \overline{CY}$ の相対輪体 z'' に写される．したがって，$H_q(X, Y) \to H_q(X \cup CY, CY)$ は全射である．さらに同様な構成により，単射であることも示すことができるが，これは読者に任せる．（証明終）

§12. CW 複体のホモロジー群の計算

0次元球面，すなわち，点の対のホモロジー群はすでにわかっている：

$$H_i(S^0) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} & i=0 \text{ のとき} \\ 0 & i>0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$n>0$ について次を示す：

$$H_i(S^n) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & i=0 \text{ または } i=n \text{ のとき} \\ 0 & i \neq 0, n \text{ のとき} \end{cases}$$

対 (D^1, S^0) のホモロジー系列

$$H_1(D^1) \to H_1(D^1, S^0) \to H_0(S^0) \to H_0(D^1) \to 0$$

を考える．D^1 は1点から成る空間にホモトピー同値であるから，$H_1(D^1)=0$ かつ $H_0(D^1) \cong \boldsymbol{Z}$ である．さて，$D^1/S^0 = S^1$ は $H_1(D^1, S^0) \cong H_1(S^1)$ を意味する．したがって，この系列を $0 \to H_1(S^1) \to \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z} \to 0$ という形で書いてよいので，完全性から $H_1(S^1) \cong \boldsymbol{Z}$ を得る．$q>1$ ならば，

$$H_q(D^1) \to H_q(D^1, S^0) \to H_{q-1}(S^0)$$

において，$H_q(D^1)$ と $H_{q-1}(S^0)$ は自明である．したがって，$q>1$ について $H_q(S^1)=0$ である．

さて，命題は次元 $<n$ の球面に対して正しいと仮定する．対 (D^n, S^{n-1}) の完全系列

$$H_q(D^n) \to H_q(D^n, S^{n-1}) \to H_{q-1}(S^{n-1}) \to H_{q-1}(D^n)$$

を考える．ここで $q>0$ のとき $H_q(D^n)=0$ かつ $H_q(D^n, S^{n-1}) \cong H_q(S^n)$ という同型を利用する．$q>1$ ならば，

$$0 \to H_q(S^n) \to H_{q-1}(S^{n-1}) \to 0$$

すなわち，$H_q(S^n)\cong H_{q-1}(S^{n-1})$ である．$q=1$ については，完全系列

$$H_1(D^n)\to H_1(D^n, S^{n-1})\to H_0(S^{n-1})\to H_0(D^n)$$

を得る．$H_1(D^n)=0, H_0(S^{n-1})\cong H_0(D^n)\cong \boldsymbol{Z}$ はもうわかっており，最後の矢印は同型であるから，$H_1(S^n)=H_1(D^n, S^{n-1})=0$ であり，命題は証明された．

注意 $H_n(D^n, S^{n-1})$ の生成元として，特異鎖 $1\cdot\varphi$ のホモロジー類を選んでよい．ただし $\varphi: \Delta^n\to D^n$ は同相写像である．$H_n(D^n, S^{n-1})\cong \boldsymbol{Z}$ の生成元の選び方には2つの可能性があるが，これは球体 D^n の2つの向き付けに対応している．

$H_n(S^n)$ の生成元の説明も同様に容易である．（これは読者に任せる．）$H_n(S^n)\cong \boldsymbol{Z}$ の生成元を定めることは S^n の向き付けを定めることに同値である．

球面の一点和のホモロジー群

n 次元球面の族の一点和

$$X=\bigvee_{i\in I} S_i^n$$

が与えられているとする．ただし，I は添字の（有限あるいは無限の）集合である．$n>0$ かつ $q>0$ ならば，標準的な同型

$$H_q(X)\cong\bigoplus_{i\in I} H_q(S_i^n)$$

がある．したがって，$H_n(X)$ は自由可換群，すなわち，球面と一対一対応にあり，すべて $\boldsymbol{Z}$ に同型な群の直和である．さらに，各球面が向き付けられていれば，この群は各元が一点和の球面と標準的に一対一対応にある生成元系をもつ．

この命題の最も簡単な証明は次の等式を適用して帰納法で行なう：

$$(\bigvee_{i\in I} D_i^n)/(\bigvee_{i\in I}\partial D_i^n)=\bigvee_{i\in I} S_i^n$$

CW 複体のホモロジー群

K はCW 複体，Σ_r はその r 次元胞体の集合とする．各胞体の向き付けは固定されているとする．このとき，上述の命題により次が成り立つ：

$$H_q(K^r, K^{r-1})\cong H_q(\bigvee_{i\in\Sigma_r} S_i^r)\cong\begin{cases}0 & q\neq r \text{ のとき}\\ \mathscr{C}_r(K) & q=r \text{ のとき}\end{cases}$$

ここで，$\mathscr{C}_r(K)$ は生成元が Σ_r と一対一対応にある自由可換群であり，この群

の元は有限線型結合 $\sum_i k_i\sigma_i^r$ と同一視してよい．ただし σ_i^r は r 次元胞体である．

$\mathscr{C}_r(K)=H_r(K^r,K^{r-1})$ かつ $\mathscr{C}_{r-1}(K)=H_{r-1}(K^{r-1},K^{r-2})$ であるから，3対 (K^r,K^{r-1},K^{r-2}) の完全系列より作用素 $\partial_r:\mathscr{C}_r(K)\to\mathscr{C}_{r-1}(K)$ を得る．したがって，次の鎖複体を得る：

$$\cdots\longrightarrow\mathscr{C}_r(K)\xrightarrow{\partial_r}\mathscr{C}_{r-1}(K)\longrightarrow\cdots$$

次の目的はこの複体 K のホモロジー群と空間 K のホモロジー群の間の標準的同型を確立することである．このような同型の存在は特別な空間のホモロジー群を計算するときの主要な道具になることがわかる．次の重要な系はすでに明らかであろう．

系　任意の有限 CW 複体は有限生成ホモロジー群をもつ．

補題　$H_j(K)\cong H_j(K^{j+1},K^{j-2})$

証明　3対 $(K^{j+1},K^{j-2},K^{j-3})$ の完全系列 $H_j(K^{j-2},K^{j-3})\to H_j(K^{j+1},K^{j-3})\to H_j(K^{j+1},K^{j-2})\to H_{j-1}(K^{j-2},K^{j-3})$ を考える．第1項と第4項は零であるから，$H_j(K^{j+1},K^{j-2})\cong H_j(K^{j+1},K^{j-3})$ である．3対 $(K^{j+1},K^{j-3},K^{j-4})$ の完全系列に同じ議論を適用して，$H_j(K^{j+1},K^{j-3})\cong H_j(K^{j+1},K^{j-4})$ を得る．同様に，$H_j(K^{j+1},K^{j-3})\cong H_j(K^{j+1},K^{j-4})\cong\cdots\cong H_j(K^{j+1},K^0)\cong H_j(K^{j+1})$，すなわち，$H_j(K^{j+1})\cong H_j(K^{j+1},K^{j-2})$ である．したがって $H_j(K)\cong H_j(K^{j+1})$ を証明すればよい．

任意の $q<j+1$ について，同型 $H_q(K^{j+1})\cong H_q(K^{j+2})$ があることを証明する．対 (K^{j+2},K^{j+1}) の完全系列

$$0=H_{j+1}(K^{j+2},K^{j+1})\to H_j(K^{j+1})\to H_j(K^{j+2})\to H_j(K^{j+2},K^{j+1})=0$$

からわかるように，$H_j(K^{j+1})\cong H_j(K^{j+2})$ を得る．同様に，$H_j(K^{j+2})\cong H_j(K^{j+3})\cong\cdots\cong H_j(K)$ である．

もし K が無限ならば，十分大きい N に対する同型 $H_j(K)\cong H_j(K^N)$ は Δ^j のコンパクト性と CW 複体の定義における公理 (W) からわかる．詳細は読者に任せる．　(証明終)

注意　この補題の証明において標準的同型 $H_j(K^{j+1},K^{j-2})\cong H_j(K)$ を確立したことになる．

次に，同型

$$\mathrm{Ker}\,\partial_j/\mathrm{Im}\,\partial_{j+1}\cong H_j(K^{j+1},K^{j-2})$$

を確立しよう．次の可換な図式を考える．ただし，横列は 3 対 (K^{j+1}, K^j, K^{j-2}) の完全系列の一部，縦列は 3 対 (K^j, K^{j-1}, K^{j-2}) の完全系列の一部，$\alpha:(K^j, K^{j-2})\to(K^{j+1}, K^{j-2})$ と $\beta:(K^j, K^{j-2})\to(K^j, K^{j-1})$ は射入である．

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & H_j(K^{j-1}, K^{j-2}) = 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
H_{j+1}(K^{j+1}, K^j) & \xrightarrow{\partial} & H_j(K^j, K^{j-2}) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_j(K^{j+1}, K^{j-2}) \to H_j(K^{j+1}, K_j) = 0 \\
 & \searrow^{\partial_{j+1}} & \downarrow \beta_* & & & & \\
 & & H_j(K^j, K^{j-1}) & & & & \\
 & & \downarrow \partial_j & & & & \\
 & & H_{j-1}(K^{j-1}, K^{j-2}) & & & &
\end{array}
$$

定義により，$H_j(K^j, K^{j-1})=\mathscr{C}_j(K)$ であり，$H_{j-1}(K^{j-1}, K^{j-2})=\mathscr{C}_{j-1}(K)$ である．$H_j(K^{j-1}, K^{j-2})$ と $H_j(K^{j+1}, K^j)$ は自明であるから，系列の完全性により β_* は単射，α_* は全射であることがわかる．したがって，$H_j(K^{j+1}, K^{j-2})\cong H_j(K^j, K^{j-2})/\mathrm{Ker}\,\alpha_*\cong H_j(K^j, K^{j-2})/\mathrm{Im}\,\partial$ である．β_* は単射であるから $H_j(K^j, K^{j-2})/\mathrm{Im}\,\partial\cong\beta_* H_j(K^j, K^{j-2})/\beta_*(\mathrm{Im}\,\partial)\cong\mathrm{Im}\,\beta_*/\mathrm{Im}(\beta_*\circ\partial)$ である．上図の可換性から，$\beta_*\circ\partial=\partial_{j+1}$ であり，また完全性より $\mathrm{Im}\,\beta_*=\mathrm{Ker}\,\partial_j$，すなわち，最後の商群は $\mathrm{Ker}\,\partial_j/\mathrm{Im}\,\partial_{j+1}$ に等しい．このとき，$H_j(K)\cong H_j(K^{j+1}, K^{j-2})\cong\mathrm{Ker}\,\partial_j/\mathrm{Im}\,\partial_{j+1}$ であり，これは $j\geq 2$ のときの定理を証明している．$j=1$ ならば，次の図を考える必要がある：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & H_1(K^0) = 0 & & \\
 & & \downarrow & & \\
H_2(K^2, K^1) & \xrightarrow{\partial} & H_1(K^1) & \to & H_1(K^2) \to H_1(K^2, K^1) = 0 \\
 & \searrow^{\partial_2} & \downarrow j_* & & \\
 & & H_1(K^1, K^0) & & \\
 & & \partial_1 \downarrow & & \\
 & & H_0(K^0) & &
\end{array}
$$

$j=0$ については $H_1(K^1, K^0)\to H_0(K^0)\to H_0(K^1)\to H_0(K^1, K^0)=0$ である．

作用素 ∂_q の幾何学的意味

定められた向き付けおよびこの向き付けと両立する特性写像 $f: D^q \to K$, $g: D^{q-1} \to K$ をもつ2つの胞体 σ^q と σ^{q-1} を考える.

合成写像 $\partial D^q = S^{q-1} \xrightarrow{f|S^{q-1}} K^{q-1} \longrightarrow K^{q-1}/K^{q-2}$ を考える．ここで K^{q-1}/K^{q-2} は $(q-1)$ 次元の球面の一点和である．この胞体 σ^{q-1} は $(q-1)$ 切片に属し，射影 $K^{q-1} \to K^{q-1}/K^{q-2}$ により1つの球面 S^{q-1} の上へ射影される.（その他の球面は基点に写す）この一点和全体 K^{q-1}/K^{q-2} からこの球面の上への写像とこの射影との合成写像 $\partial D^q = S^{q-1} \to K^{q-1}/K^{q-2} \to S^{q-1}$ は写像 $S^{q-1} \to S^{q-1}$ を与え，これは $\pi_{q-1}(S^{q-1}) \cong \boldsymbol{Z}$ の元，すなわち1つの整数，いわゆる**写像度**を表わす．このようにして，胞体の各対に**結合係数** $[\sigma^q : \sigma^{q-1}]$ とよばれる整数を対応させることができる．これは σ^q と σ^{q-1} の向き付けに依存しているが，容易に確かめられるように，特性写像 f, g の特別な選び方には独立である.

定理　$\partial\sigma^q = \sum [\sigma^q : \sigma^{q-1}]\sigma^{q-1}$，ただし，和は複体 K のすべての $(q-1)$ 次元胞体にわたる.

このように，境界作用素は純粋に代数的な定義にもかかわらず，明白な幾何学的意味ももっている. $[\sigma^q ; \sigma^{q-1}] \neq 0$ となるのは σ^q の閉包と交わるような σ^{q-1} とだけであり，そのような個数は有限であるから，この定理における和はCW複体の定義における公理 (C) により有限である.

証明　3対の写像 $(D^q, S^{q-1}, \emptyset) \to (K^q, K^{q-1}, K^{q-2})$ を考える．ただし，$D^q \to K^q$ は σ^q の特性写像 f であり，$\partial D^q = S^{q-1} \to K^{q-1}$ はその制限である．ホモロジー完全系列の関手的性質により次の可換な図を得る：

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \boldsymbol{Z} & & \\
 & & \wr\!\| & & \\
0 = H_q(D^q) & \to & H_q(D^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{q-1}(S^{q-1}) \cong \boldsymbol{Z} \to 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow \\
 & & H_q(K^q, K^{q-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{q-1}(K^{q-1}, K^{q-2}) \\
 & & \| & & \| \\
 & & \mathscr{C}_q(K) & & \mathscr{C}_{q-1}(K)
\end{array}
$$

ただし，$H_q(D^q, S^{q-1}) \cong H_q(S^q) \cong \boldsymbol{Z}$ である．（ここで $q > 1$ である．$q=1$ の場合はまったく同様であり，読者に任せる.）

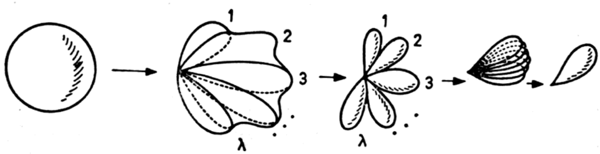
生成元 $1 \in H_q(D^q, S^{q-1}) \cong \boldsymbol{Z}$ を考える．まず，この元は $\alpha = f_*$ により鎖 $1 \cdot \sigma^q \in \mathscr{C}_q(K)$ に，ついで ∂ により $\partial\sigma^q$ に写される．さて，同じ生成元をもう1つ

のルートで追ってみよう．まず，この元はホモロジー系列の定義からわかるように，$1\in \boldsymbol{Z}\cong H_{q-1}(S^{q-1})$ に写される．さらに，写像 $\varphi_\lambda: S^{q-1}\to\vee S^{q-1}$ に同値な写像 $(S^{q-1},\varnothing)\to(K^{q-1},K^{q-2})$ があり，これは準同型 $\varphi_{\lambda*}: H_{q-1}(S^{q-1})\cong\boldsymbol{Z}\to H_{q-1}(K^{q-1},K^{q-2})\cong\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}$ を誘導する．ここで $\mathscr{C}_{q-1}(K)$ の各生成元は1つの胞体 σ^{q-1} に対応する．$1\in H_{q-1}(S^{q-1})$ の像におけるそれらの係数を求めなければならない．

補題 $h: S^q\to S^q$ の写像度が λ ならば，$H_q(S^q)\cong\boldsymbol{Z}$ の自己準同型 h_* は1を λ に写す．

したがって，求める係数はまさに結合係数 $[\sigma^q,\sigma^{q-1}]$ に等しく，これは証明すべき等式 $\partial\sigma^q=\sum[\sigma^q,\sigma^{q-1}]\sigma^{q-1}$ を意味する．

補題の証明 写像度 λ の写像がどのように構成されるか次の図で思いおこそう．



$$S^n \xrightarrow[\varphi_\lambda]{} \bigvee_{i=1}^{\lambda} S^n \xrightarrow[\text{折りたたむ}]{} S^n$$

球面から λ 個の球面の1点和への写像は $H_q(S^q)$ の生成元を1点和の q 次元ホモロジー群のすべての生成元の和に写し，次に1点和から球面への写像は，各生成元を $H_q(S^q)$ の生成元へ写す準同型を誘導する．これは補題の要求していることである．（証明終）

ホモロジー群の計算

(1) 球面 S^n. n 次元球面は2つの胞体 σ^0 と σ^n への分割をもつ．明らかに $\mathscr{C}_0=\mathscr{C}_n=\boldsymbol{Z}$ かつ $\partial=0$ であり，したがって，すでにわかっているように $H_0=\mathscr{C}_0\cong H_n=\mathscr{C}_n\cong\boldsymbol{Z}$ である．

(2) 複素射影空間 $\boldsymbol{CP}^n$. $\boldsymbol{CP}^n$ の点は少なくとも1つは0でない複素数の列 $(z_0:z_1:\cdots:z_n)$ で，0でない複素数を掛けることで同一視されたものである．$\boldsymbol{CP}^n$ では次の胞体構造を考える．胞体 σ^{2q} ($2q$ は実次元)，$0\leq q\leq n$，は $z_q\neq 0$,

$z_{q+1}=z_{q+2}=\cdots=z_n=0$ が成り立つ $\boldsymbol{CP}^n$ のすべての点の部分集合として定義され，胞体 σ^{2q} の特性写像 $D^{2q}\to\boldsymbol{CP}^n$ は次式で与えられる：

$$(z_1,\cdots,z_q)\longmapsto(z_1:\cdots:z_q:\sqrt{1-|z_1|^2-\cdots-|z_q|^2}:0:\cdots:0)$$

このとき，次が成り立つ：

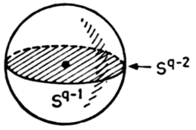
$$\mathscr{C}_i(\boldsymbol{CP}^n)\cong\begin{cases}0 & i=2k+1 \text{ または } i>2n \text{ のとき}\\ \boldsymbol{Z} & i=2k \text{ のとき}\end{cases}$$

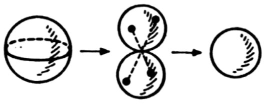
すべての境界作用素は零であるから，$H_i=\mathscr{C}_i$ である．

(3)　実射影空間 $\boldsymbol{RP}^n$．　この空間の点は少なくとも1つの k について $x_k\neq0$ が成り立つ実数の列 $(x_0:x_1:\cdots:x_n)$ で，0でない実数を掛けることで同一視されたものである．胞体 σ^q は $x_q\neq0, x_{q+1}=x_{q+2}=\cdots=x_n=0$ が成り立つすべての点から成る．この例と前出の例の間の差は，$\boldsymbol{RP}^n$ は各次元に胞体が（唯1つ）あり，$\boldsymbol{CP}^n$ には偶数次元の胞体だけがあるということである．特性写像を説明しよう．球体 D^q を考え，$S^{q-1}=\partial D^q$ 上で直径上の対称点を同一視する．これは写像 $D^q\to\boldsymbol{RP}^q=\bar{\sigma}^q\subset\boldsymbol{RP}^n$ を与える．したがって，

$$\mathscr{C}_i(\boldsymbol{RP}^n)=\boldsymbol{Z},\ 0\leq i\leq n$$

である．さて，∂ はもはや自明ではないので，結合係数を計算しよう．このためには，写像：$\partial D^q=S^{q-1}\to\boldsymbol{RP}^{q-1}\to\boldsymbol{RP}^{q-1}/\boldsymbol{RP}^{q-2}=S^{q-1}$ の写像度を計算しなければならない．ここで最後の等式は各次元に唯一つの胞体があるから成り立つ．得られた合成写像 $S^{q-1}\to S^{q-1}$ が誘導するホモロジー群の間の準同型を計算しよう．まず，写像 $S^{q-1}\to\boldsymbol{RP}^{q-1}$ であるが，ここで $\boldsymbol{RP}^{q-1}$ は，赤道上の対角線上にある対称点が対ごとに互いに同一視されている上半球面として表わされ





ているとしてよい．すなわち，赤道は $\boldsymbol{RP}^{q-2}$ である．さらに，射影 $\boldsymbol{RP}^{q-1}\to\boldsymbol{RP}^{q-1}/\boldsymbol{RP}^{q-2}$ により赤道は1点に縮み，したがって上半球面は S^{q-1} になる．同じ写像は次のように説明することもできる．まず，赤道を1点に縮め，ついで得られた1点和において，2つの球面を各点が直線上の対称点と同一視されるように縫い合わせる．球面の中心鏡映は，球面の次元が奇数ならば，向きを

保ち，次元が偶数ならば向きを変える．したがって，写像 $S^{q-1}\to S^{q-1}$ は q が奇数ならば写像度 0，q が偶数ならば写像度 2 である．

したがって，結合係数 $[\sigma^q;\sigma^{q-1}]$ は，$q=2k+1$ ならば 0，q が偶数ならば 2 であると結論できる．このように，$\partial\sigma^{2k}=2\sigma^{2k-1}$ および $\partial\sigma^{2k-1}=0$ である．ゆえに，

$$\begin{aligned} &H_0(\boldsymbol{RP}^n)\cong\boldsymbol{Z}\\ &H_1(\boldsymbol{RP}^n)\cong\boldsymbol{Z}_2\\ &H_2(\boldsymbol{RP}^n)=0\\ &H_3(\boldsymbol{RP}^n)\cong\boldsymbol{Z}_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$n=2k$ のとき	$n=2k+1$ のとき
$H_{2k-1}(\boldsymbol{RP}^n)\cong\boldsymbol{Z}_2$	$H_{2k}(\boldsymbol{RP}^n)=0$
$H_{2k}(\boldsymbol{RP}^n)=0$	$H_{2k+1}(\boldsymbol{RP}^n)\cong\boldsymbol{Z}$

演習　次のホモロジー群を計算せよ．(a) 輪環面，(b) Klein の壺，(c) 空間 $\boldsymbol{RP}^2\times\boldsymbol{RP}^2$

任意の群に係数をもつホモロジー

整係数の場合とまったく同様にして，任意の可換群 G に係数をもつ特異単体の線型結合として特異鎖を定義することにより特異ホモロジー論を構成することができる．したがって，ホモロジー群が得られ，これを $H_q(X;G)$，$H_q(X,Y;G)$ と表わす．この一般の場合にも，前 2 節の基本的な結果を拡張できる．特に，K が CW 複体ならば，$H_q(K;G)=\mathrm{Ker}\,\partial_q/\partial_{q+1}(\mathscr{C}_{q+1}(K;G))$，ここで，$\mathscr{C}_i(K;G)$ は $\sum g_k\sigma_k$ ($g_k\in G$，σ_k^i は i 次元胞体）という形の有限線型結合の群であり，∂_i は次式により定義される：

$$\partial_i\left(\textstyle\sum_k g_k\sigma_k^i\right)=\textstyle\sum_{k,l} g_k[\sigma_k^i:\sigma_l^{i-1}]\sigma_l^{i-1}$$

（ただし，σ_k^i と σ_l^{i-1} はそれぞれ i 次元，$(i-1)$ 次元の胞体の集合の中を動く）．例えば

$$H_i(\boldsymbol{RP}^n;\boldsymbol{Z}_2)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z}_2 & 0\le i\le n\\ 0 & i>n\end{cases}$$

である．実際，$i\le n$ について $\mathscr{C}_i(\boldsymbol{RP}^n;\boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2$ であり，$\partial_i:\mathscr{C}_i(\boldsymbol{RP}^n;\boldsymbol{Z}_2)\to\mathscr{C}_{i-1}(\boldsymbol{RP}^n;\boldsymbol{Z}_2)$ は ($2\equiv 0 \bmod 2$ であるので) 自明である．

以下，さらに様々な係数をもつホモロジー論をもっと詳しく考察しよう．

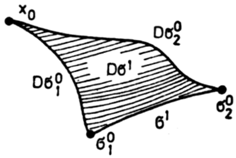
記号　$H_i(X)$ は $H_i(X;\mathbf{Z})$ を表わす．

§13. ホモロジーとホモトピー

定理　空間 X が自明なホモトピー群をもつ（かつ特に弧状連結）ならば，そのホモロジー群も自明である．すなわち，$H_0(X)\cong\mathbf{Z}$ かつ $q>0$ のとき $H_q(X)=0$ である．

注意　CW 複体に対しては定理は自明である．すべての i について $\pi_i(X)=0$ は X が可縮であることを意味し，したがって $H_i(X)\cong H_i(1\text{点})$ である．

証明　X の 0 次元特異単体は実は X の点である．点 $x_0\in X$ を固定し，各 0 次元特異単体 σ^0 に対して σ^0 を x_0 に結ぶ道 $D\sigma^0$ を選ぼう．道 $D\sigma^0$ は 1 次元特異単体または 1 次元特異鎖とみなしてよい．さらに $\partial(D\sigma^0)=x_0-\sigma^0$ である．



任意の 0 次元鎖 $c=\sum k_i\sigma_i^0$ に対して $Dc=\sum k_iD\sigma_i^0$ とおく．σ^1 が X の 1 次元特異単体で $\partial\sigma^1=\sigma_1^0-\sigma_2^0$ ならば，1 次元単体 $D\sigma_1^0, \sigma^1$ および $D\sigma_2^0$ はあわせて 2 次元単体 $\varDelta^2$ の境界から X への写像を形成する．X は単連結であるから，この写像は写像 $\varDelta^2\to X$ に拡張でき，これは X の 2 次元特異単体である．さて，各 1 次元特異単体 σ^1 に対してこのような 2 次元単体 $D\sigma^1$ を固定する．明らかに，$\partial D\sigma^1=D\partial\sigma^1+\sigma^1$ である．群 $\pi_q(X)$ の自明なことを利用して，つづく次元でこの操作を続けて，X の任意の単体 σ に対して次元が 1 大きいもう 1 つの単体 $D\sigma$ で，$\dim\sigma>0$ ならば，$\partial D\sigma=D\partial\sigma+\sigma$ を満たすものを構成することができる．写像 $D:\oplus_qC_q(X)\to\oplus_qC_q(X)$ は，恒等写像 $\bar{\varphi}:\oplus_qC_q(X)\to\oplus_qC_q(X)$ を次式で定義される $\varphi:\oplus_qC_q(X)\to\oplus_qC_q(X)$ に結ぶ鎖ホモトピーである：

$$\varphi(c)=\begin{cases}(\mathrm{Ind}\,c)x_0 & c\in C_0(X)\ \text{のとき}\\ 0 & c\in C_q(X),\ q>0\ \text{のとき}\end{cases}$$

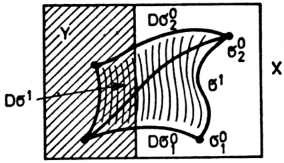
このとき，明らかに φ はホモロジー群の自明な写像を誘導し，同時に，φ は恒等

写像にホモトープである．これは，ホモロジー群が自明，すなわち，$H_0(X)\cong \boldsymbol{Z}$ かつ $q>0$ ならば $H_q(X)=0$ の場合にのみ可能である．　（証明終）

相対の場合の類似な定理は言葉通り同じ方法で証明できる．

定理　(X, Y) は位相空間の対，X は弧状連結とする．各 q について $\pi_q(X, Y)=0$ ならば，各 q について $H_q(X, Y)=0$ である．

恒等写像を零写像に結ぶホモトピー $D : \oplus_q C_q(X, Y)\to\oplus_q C_q(X, Y)$ は次の図で示されるように構成される：



系　Y は弧状連結とする．写像 $f : X\to Y$ がホモトピー群の間の同型を誘導するならば，ホモロジー群の間の同型も誘導する．

証明　相対の場合の定理を対 (M_f, X) に適用する．ただし，M_f は f の写像柱（Y が弧状連結ならばこれも弧状連結）である．次のホモトピー完全系列

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_i(X) & \to & \pi_i(M_f) & \to & \pi_i(M_f, X) & \to & \pi_{i-1}(X) & \to & \pi_{i-1}(M_f) \\
 & {\scriptstyle f_*}\searrow & \| & & & & & {\scriptstyle f_*}\searrow & \| \\
 & & \pi_i(Y) & & & & & & \pi_{i-1}(Y)
\end{array}$$

により，（$i=1$ のときは集合とみなして）各 i について $\pi_i(M_f, X)=0$ を得る．したがって，各 i について $H_i(M_f, X)=0$ である．さて対 (M_f, X) のホモロジー完全系列から，射入 $X\to M_f$ および写像 $f : X\to Y$ は各次元のホモロジー群の同型を誘導することがわかる．　（証明終）

系のもう 1 つの定式化　$f : X\to Y$ が弱ホモトピー同値ならば，$f_* : H_*(X)\to H_*(Y)$ は同型である．

Hurewicz の定理

定理　X は弧状連結な空間とする．$\alpha<q$ について $\pi_\alpha(X)=0$ かつ $\pi_q(X)\neq 0$ $(q>1)$ ならば，$\alpha<q$ について $H_\alpha(X)=0$ かつ $H_q(X)\cong\pi_q(X)$ である．

証明　位相空間 X は（§10 の胞体近似定理により）一般性を失うことなく，CW 複体であると仮定してよく，しかも §3 の（胞体近似定理の系である）定理で指摘したように，q より小さいすべての次元の胞体はもたないと仮定してもよい．§10 で示したように，$\pi_q(X)$ は可換群であり，その生成元と関係式はそれぞれ q 次元，$(q+1)$ 次元の胞体に対応する．もっと正確には，任意の胞体 σ_j^{q+1} に対して特性写像 $f_j^{q+1}: D^{q+1}\to X$ を考え，それを $S^q=\partial D^{q+1}$ に制限して，S^q から X の q 切片，すなわち，$\vee S_i^q$ への写像を得，これは生成元 σ_i^q で張られた自由可換群の元を表わす．これを零にして関係式を得る．

これらの注意の後では，定理はもう明らかである．実際，q より小さい次元の胞体はないから $\alpha<q$ について $H_\alpha(X)=0$ を得る．次元 q では $\partial\equiv 0$ であるから $\mathscr{C}_q(X)=Z_q(X)$ である．さて $B_q(X)$ は $\pi_q(X)$ の関係式と直接対応しているから同型を得る．（証明終）

Hurewicz の定理については，以下で重要になるもっと正確な定式化がある．$\alpha\in\pi_q(X)$ は $f: S^q\to X$ により表わされているとする．標準的球面 S^q はここでは，固定した向き付けをもっていると仮定する．元 $f_*(1)\in H_q(X)$ は明らかに α により定められ，これはいわゆる **Hurewicz 準同型** $\mathfrak{H}_q: \pi_q(X)\to H_q(X)$ を定義する．

演習　実際 $\mathfrak{H}_q$ が準同型であることを確かめよ．

定理（Hurewicz）　もし $q>1$ について $\pi_0(X)=\cdots=\pi_{q-1}(X)=0$ ならば $\mathfrak{H}_q$ は同型である．

証明は本質的には上に紹介されている．もっと詳しくは読者に任せたい．

演習　相対 Hurewicz の定理を定式化し証明せよ．

$q=1$ の場合

定理　X が弧状連結ならば，$H_1(X)\cong\pi_1(X)/[\pi_1(X),\pi_1(X)]$ である．ここで $[\pi_1(X),\pi_1(X)]$ は $\pi_1(X)$ の交換子群（すなわち，$aba^{-1}b^{-1}$, a, $b\in\pi_1(X)$，という形のすべての元で生成される部分群）である．

もっと正確な定式化　弧状連結な X に対して，準同型 $\mathfrak{H}_1: \pi_1(X)\to H_1(X)$ は核 $[\pi_1(X),\pi_1(X)]$ をもつ全射準同型である．

証明　空間 X は唯 1 つの頂点をもつ CW 複体であると仮定してもよい．このとき，$\pi_1(X)$ は生成元と関係式が X のそれぞれ 1 次元，2 次元胞体に対応

する群である．さて，$H_1(X)$ は $\pi_1(X)$ と同じ生成元と関係式をもつ可換群である．言いかえれば，$\pi_1(X)$ から関係式に元ごとの可換性の関係式を追加することにより $H_1(X)$ を得る．（証明終）

（第2の定式化の証明は読者に任せる．）

逆の Hurewicz の定理

定理　X は弧状連結とする．$\pi_1(X)=0$ かつ $\alpha<q$ について $H_\alpha(X)=0$ ならば，$1<\alpha<q$ について $\pi_\alpha(X)=0$ かつ $\pi_q(X)\cong H_q(X)$ である．

証明　ある $r<q$ について $\pi_r(X)$ は零と異なると仮定する．このとき，最初の自明でないホモトピー群は，仮定に反して，最初の自明でないホモロジー群に等しい．したがって，$\pi_2(X)=\pi_3(X)=\cdots=\pi_{q-1}(X)=0$ であり，Hurewicz の定理により $\pi_q(X)\cong H_q(X)$ である．（証明終）

逆の Hurewicz の定理もその相対形をもつ．

Whitehead の定理

定理　X と Y は弧状連結かつ単連結であり，$f:X\to Y$ は任意の写像，かつ，$f_*:\pi_2(X)\to\pi_2(Y)$ は全射であると仮定する．このとき，次の命題は同値である：

(1)　$f_*:\pi_r(X)\to\pi_r(Y)$ は，$r<q$ のとき同型，$r=q$ のとき全射である．

(2)　$f_*:H_r(X)\to H_r(Y)$ は，$r<q$ のとき同型，$r=q$ のとき全射である．

M_f は f の写像柱として対 (M_f,X) を考えれば，この定理は相対 Hurewicz の定理から直ちにわかる．

§14. コホモロジー

双対鎖　空間 X の鎖 $C_q(X)$ を考え，G は(固定した)可換群とする．空間 X の G に係数をもつ**双対鎖**とは，$C_q(X)$ から G への準同型である．一般に，$\mathrm{Hom}(A,B)$ は可換群 A から可換群 B へのすべての準同型の集合を表わすとき，自然な和により双対鎖の集合 $\mathrm{Hom}(C_q(X),G)$ は $C^q(X;G)$ と表わされる群になる．

双対境界作用素 $\boldsymbol{\delta}$　F_1,F_2 は1組の群，G は3番目の群とする．準同型 $\varphi:F_1\to F_2$ が与えられたとき，φ は式

$$(\varphi^* f)(a) = f(\varphi a),\ f \in \mathrm{Hom}\,(F_2, G)$$

で定義される準同型 $\varphi^* : \mathrm{Hom}\,(F_2, G) \to \mathrm{Hom}\,(F_1, G)$ を誘導する．特に，φ を境界作用素 $\partial : C_q(X) \to C_{q-1}(X)$ とするとき，いわゆる**双対境界作用素**とは $\delta = \varphi^* : C^{q-1}(X) \to C^q(X)$ である．

任意の鎖 $c \in C_q(X)$ に対して $(\delta\zeta)(c) = \zeta(\partial c)$ である．$\partial^2 = 0$ であるから，$\delta^2 = 0$ も成り立つ．したがって，系列

$$\cdots \xleftarrow{\delta^2} C^2 \xleftarrow{\delta^1} C^1 \xleftarrow{\delta^0} C^0 \leftarrow G \cdots$$

は(**双対鎖複体**とよばれる)複体である．

コホモロジー群　ホモロジー群と境界作用素の場合と同様に，$\mathrm{Ker}\,\delta^q = Z^q(X\,;G)$ と $\mathrm{Im}\,\delta^{q-1} = B^q(X\,;G)$ を考える．このとき商群 $H^q(X\,;G) = \mathrm{Ker}\,\delta^q / \mathrm{Im}\,\delta^{q-1}$ が空間 X の G に係数をもつ q 次**コホモロジー群**である．

零次元コホモロジー群　X は連結とする．0次元の零でない元はどれも双対境界輪体でない，すなわち，$B^0(X\,;G) = 0$ である．双対鎖 $\xi \in C^0(X\,;G)$ が双対輪体($\Longleftrightarrow \delta^0\xi = 0$) であるための必要十分条件は，$\xi$ が定値である，すなわち，C_0 を G の1つの元に写すことである．実際，零次元双対鎖 ζ は値を G にとる X 上の関数である．今，a, b は1組の点で $\zeta(a) \neq \zeta(b)$ を満たすものとし，a と b を結ぶ1次元単体 σ^1 を考えると，$(\delta\zeta)(\sigma^1) = \zeta(\partial\sigma^1) = \zeta(a) - \zeta(b) \neq 0$，すなわち $\delta\zeta \neq 0$ である．これで自然な同型 $H^0(X\,;G) \cong G$ を得たことになる．同様に，X_i は X の連結成分とし，$X = \bigcup_i X_i$ ならば，$H^0(X\,;G) \cong \bigoplus_i G$ である．

相対コホモロジー群　Y は X の閉部分集合と仮定する．このとき自然な射入 $C_q(Y) \subset C_q(X)$ を得る．部分群 $C^q(X, Y) \subset \mathrm{Hom}\,(C_q(X)\,;G)$ とは $C_q(Y)$ 上で値が零であるすべての双対鎖から成るものである．明らかに，$\delta(C^q(X, Y)) \subset C^{q+1}(X, Y)$ であり，したがって，相対コホモロジー群 $H^q(X, Y\,;G)$ は同様な方法で定義される．

コホモロジー完全系列　ホモロジーの場合と同様，対 (X, Y) に対してコホモロジー群の完全系列を構成できる．射入 $i : Y \to X$ は準同型 $i^* : H^q(X\,;G) \to H^q(Y\,;G)$ を誘導する．ζ を $C^q(Y\,;G)$ の双対輪体，すなわち，準同型 $\zeta : C_q(Y) \to G$ で $\delta\zeta = 0$ とし，準同型 $\bar{\zeta} : C_q(X) \to G$ は ζ の $C_q(X)$ への拡張の1つとする．このとき，$\zeta' = \delta\bar{\zeta}$ は $C_q(Y)$ で消えるので，$\delta\bar{\zeta}$ は相対双対輪体 mod

Y であり，したがって，準同型 $H^q(Y;G)\to H^{q+1}(X,Y;G)$ を得る．この定義に矛盾のないことは容易に確かめられる．すなわち，この準同型は元 ζ の特別な選び方とその拡張に依存しない．

任意の相対双対輪体は絶対双対輪体とみなしてもよいので，自然な準同型 $H^{q+1}(X,Y;G)\to H^{q+1}(X;G)$ がある．この結果として次の系列が得られる：

$$\cdots\to H^q(X,Y;G)\to H^q(X;G)\to H^q(Y;G)\to H^{q+1}(X,Y;G)\to\cdots$$

演習　上の系列は完全であることを証明せよ．

3 対の完全系列は対の完全系列の簡単な一般化である．すなわち，$X\supset Y\supset Z$ とするとき，絶対群を相対群 mod Z で形式的に置き換えさえすればよい．このとき次を得る：

$$\cdots\to H^q(X,Y;G)\to H^q(X,Z;G)\to H^q(Y,Z;G)\to H^{q+1}(X,Y;G)\to\cdots$$

これは再び完全系列となる．

胞体コホモロジー群　ホモロジーの場合と同様に，胞体双体鎖は $\mathscr{C}^q(X)=H^q(X^q,X^{q-1};G)$ により定義してよい．ただし，X^q は X の q 切片を表わす．双対境界作用素

$$\delta: H^q(X^q,X^{q-1};G)\to H^{q+1}(X^{q+1},X^q;G),$$

すなわち，$\delta:\mathscr{C}^q(X)\to\mathscr{C}^{q+1}(X)$ は，3 対 (X^{q+1},X^q,X^{q-1}) のコホモロジー完全系列において対応する場所の準同型として生ずる．

ホモロジーとコホモロジーの間の重要な差に注意しよう．双対鎖は，$1\cdot\sigma^q$ という形の有限個の初等的輪体の上以外では消えるというような規則はない．したがって，一般に双対鎖は無限の線型結合 $\sum g_k\sigma_k^q$ として書けるだけである．

$H^q(X;\boldsymbol{Z})$ と $H_q(X)$ の間の**スカラー積**は次のように定義される．$\alpha\in H^q(X;\boldsymbol{Z})$, $\beta\in H_q(X)$ とし，a と b はそれぞれ α と β を表わすものとして，$(\alpha,\beta)=a(b)$ とおく．a と b はそれぞれ双対輪体，輪体であるから，

$$\begin{aligned}(a+\delta a')(b+\partial b')&=a(b)+\delta a'(b)+a(\partial b')+\delta a'(\partial b')\\&=a(b)+a'(\partial b)+\delta a(b')+\delta^2a'(b')=a(b)\end{aligned}$$

が成り立つので，この定義は明らかに，α と β の特別な代表元の取り方に依存しない．元 $\alpha\in H^q(X;\boldsymbol{Z})$ が $H_q(X)$ のすべての元とのスカラー積によっては完全に定まらないということは容易におこる．例えば，α は $H^q(X;\boldsymbol{Z})$ の有限位数をもつ元とすると，各 $\beta\in H_q(X)$ に対して $(\alpha,\beta)=0$ である．

演習　$H_q(X)\cong\boldsymbol{Z}^{m_q}\oplus T_q$ かつ $H^q(X;\boldsymbol{Z})\cong\boldsymbol{Z}^{n_q}\oplus T^q$ とする．ただし，$\boldsymbol{Z}^{m_q}=$

$\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}$ (m_q 項), $\boldsymbol{Z}^{n_q}=\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}$ (n_q 項), T_q と T^q は torsion 群である．任意の q について，$m_q=n_q$ かつ $T_q=T^{q+1}$ であることを証明せよ．

体に係数をもつコホモロジーとホモロジー

k が体であるとき，有限 CW 複体 X に対して $H^q(X\,;k)$ と $H_q(X\,;k)$ を考える．このとき群 $\mathscr{C}_q(X\,;k)$ は k 上の有限次元線型空間であり，輪体群 $Z_q(X\,;k)$ と境界輪体群 $B_q(X\,;k)$ はその部分空間をなす．それらの商 $H_q(X\,;k)$ も線型空間で，$H_q(X\,;k)\cong k\oplus\cdots\oplus k$ となる．

双対鎖群 $\mathscr{C}^q(X\,;k)$ は k に値をもつ $\mathscr{C}_q(X\,;k)$ 上の線型汎関数の空間とみなしてよい．言いかえれば，$\mathscr{C}_q(X\,;k)$ と $\mathscr{C}^q(X\,;k)$ は随伴線型空間であり，$\partial:\mathscr{C}_q(X\,;k)\to\mathscr{C}_{q-1}(X\,;k)$ と $\delta:\mathscr{C}^{q-1}(X\,;k)\to\mathscr{C}^q(X\,;k)$ は随伴作用素である．したがって，$\mathrm{Ker}\,\partial$ と $\mathrm{Coker}\,\delta=\mathscr{C}^q(X\,;k)/\mathrm{Im}\,\delta$，さらに $\mathrm{Im}\,\partial$ と $\mathrm{Coim}\,\delta=\mathscr{C}^{q-1}(X\,;k)/\mathrm{Ker}\,\delta$，と同時に $H_q(X\,;k)=\mathrm{Ker}\,\partial/\mathrm{Im}\,\partial$ と射影 $\mathrm{Coker}\,\delta\to\mathrm{Coim}\,\delta$ の核，すなわち，$\mathrm{Ker}\,\delta/\mathrm{Im}\,\delta=H^q(X\,;k)$ は随伴線型空間の対である．このように，$H_q(X\,;k)$ と $H^q(X\,;k)$ は随伴線型空間であり，特に，同じ次元をもつ．$H^q(X\,;k)$ と $H_q(X\,;k)$ の間のスカラー積は整係数の場合と違って明らかに非退化である．

§15．係数の変更

定理　$\boldsymbol{Q}$ は有理数の群とするとき，$H_i(X\,;\boldsymbol{Q})\cong H_i(X)\otimes\boldsymbol{Q}$ である．言いかえれば，もし

$$H_i(X)\cong\underbrace{\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}}_{p}\oplus(\text{有限群})$$

ならば，

$$H_i(X\,;\boldsymbol{Q})\cong\underbrace{\boldsymbol{Q}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Q}}_{p}$$

証明　射入 $\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Q}$ は埋込み $C_i(X)\to C_i(X\,;\boldsymbol{Q})$ を誘導する．次の可換図

$$\begin{array}{ccc} C_i(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{i-1}(X) \\ \cap & & \cap \\ C_i(X\,;\boldsymbol{Q}) & \xrightarrow{\partial} & C_{i-1}(X\,;\boldsymbol{Q}) \end{array}$$

により，$C_i(X)$ の鎖は $C_i(X)$ と $C_i(X\,;\boldsymbol{Q})$ の輪体として同時に現われるか，ともに現われないかのどちらかである．すなわち，$Z_i(X)=Z_i(X\,;\boldsymbol{Q})\cap C_i(X)$ である．したがって，$\alpha\in Z_i(X\,;\boldsymbol{Q})$ が境界輪体ならば，ある M について $M\alpha$ は $Z_i(X)$ において境界輪体である．したがって，$H_i(X)\to H_i(X\,;\boldsymbol{Q})$ は有限の核をもち，$H_i(X\,;\boldsymbol{Q})$ の各元は，適当な整数を掛ければ $H_i(X)$ の像に入る．これは準同型

$$H_i(X)\otimes\boldsymbol{Q}\to H_i(X\,;\boldsymbol{Q})\otimes\boldsymbol{Q}=H_i(X\,;\boldsymbol{Q})$$

が同型であることを意味する．

類似な定理　任意の有限 CW 複体 X に対して次が成り立つ：

$$H^i(X\,;\boldsymbol{Q})=H^i(X\,;\boldsymbol{Z})\otimes\boldsymbol{Q}.$$

$\dim H^i(X\,;\boldsymbol{Q})=\dim H_i(X\,;\boldsymbol{Q})$ であるから，任意の有限 CW 複体 X に対して $\operatorname{rank} H^i(X\,;\boldsymbol{Z})=\operatorname{rank} H_i(X)$ である（上の演習を参照）．

さて，$G_1\subset G$ であり $G_2\cong G/G_1$ と仮定する．完全系列 $0\to G_1\xrightarrow{i}G\xrightarrow{j}G_2\to 0$ とこれに対応する鎖複体の完全系列

$$0\to\mathscr{C}\otimes G_1\to\mathscr{C}\otimes G\to\mathscr{C}\otimes G_2\to 0$$

を考える．ただし，$\mathscr{C}=\mathscr{C}(X\,;\boldsymbol{Z})$ は複体 X の胞体鎖の複体である．

演習　上の系列の完全性を確かめよ．

すぐわかるように，次のホモロジー完全系列

$$\cdots\to H_i(X\,;G_1)\xrightarrow{i_*}H_i(X\,;G)\xrightarrow{j_*}H_i(X\,;G_2)\xrightarrow{\beta}H_{i-1}(X\,;G_1)\to\cdots$$

が存在する．ただし，i_* と j_* は準同型 i と j より誘導され，β は次のように定義される **Bockstein 準同型**である．輪体 $a\in\mathscr{C}_i(X\,;G_2)$ はホモロジー類 $\alpha\in H_i(X\,;G_2)$ を表わすとする．$j:G\to G_2$ は全射準同型であるから，鎖 a に対応する鎖 $a'\in\mathscr{C}_i(X\,;G)$ を構成することができる．さて，a' は輪体とは限らないが，性質 $j_*(\partial a')=0$ をもつ．したがって，鎖 $\partial a'$ のすべての係数は同じ剰余類 $\operatorname{mod} G_1$，すなわち，G_1 そのものに属する．したがって $\partial a'\in\mathscr{C}_{i-1}(X\,;G_1)$ である．このとき，準同型 $\beta:H_i(X\,;G_2)\to H_{i-1}(X\,;G_1)$ は α に $\partial a'$ のホモロジー類を対応させて定義される．$j:G\to G_2$ により誘導される準同型で $a'\longmapsto a\neq 0$ ならば，$a'\notin Z_i(X\,;G)$ であるとは限らない．しかも，a' を $\mathscr{C}_i(X\,;G)$ において輪体に選べないならば，$\partial a'$ は $\mathscr{C}_{i-1}(X\,;G_1)$ において零ホモローグでない，すなわち，$\beta(a)\neq 0$ である．$a'\in Z_i(X\,;G)$ ならば，$\partial a'=0$ かつ $\beta(a)=0$ であり，これは $\operatorname{Im} j_*=\operatorname{Ker}\beta$ を意味する．項 $H_i(X\,;G)$ と $H_i(X\,;G_1)$

における完全性は，i_* と j_* の定義より明らかである．

演習　Bockstein 準同型は矛盾なく定義されていることを確かめよ．

コホモロジーでも同様な完全系列

$$\cdots \to H^i(X;G_1) \to H^i(X;G) \to H^i(X;G_2) \xrightarrow{\beta} H^{i+1}(X;G_1) \to \cdots$$

を得る．ただし，β は上と同様な**コホモロジー Bockstein 準同型**である．

普遍係数公式

任意の可換群 G_1 と G_2 に対して公式

$$H_i(X;G_1 \oplus G_2) = H_i(X;G_1) \oplus H_i(X;G_2)$$

が成り立つから，任意の係数をもつ X のホモロジー群は，$H_i(X)$ とすべての $H_i(X;\boldsymbol{Z}_k)$ がわかれば，計算できる．したがって，$H_i(X)$ により $H_i(X;\boldsymbol{Z}_k)$ を表わそう．完全系列

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{Z} \xrightarrow{i} \boldsymbol{Z} \xrightarrow{j} \boldsymbol{Z}_k \longrightarrow 0$$

を考える．ただし，i は整数 k の掛算である．このとき完全系列

$$\cdots \to H_i(X) \xrightarrow{i_*} H_i(X) \xrightarrow{j_*} H_i(X;\boldsymbol{Z}_k) \xrightarrow{\beta} H_{i-1}(X) \to \cdots$$

が得られる．ただし，i_* も k の掛算である．これにより $H_i(X)$ と $H_{i-1}(X)$ がわかれば，群 $H_i(X;\boldsymbol{Z}_k)$ は定まることになる．

この系列の上記の部分を

$$0 \to H_i(X)/k\cdot H_i(X) \to H_i(X;\boldsymbol{Z}_k) \to \{H_{i-1}(X) \text{ の位数 } k \text{ の元}\} \to 0$$

で置き換える．ただし，$k\cdot H_i(X)$ は $b'=kb, b\in H_i(X)$，という形の元から成る $H_i(X)$ の部分群を表わす．要するに，$H_i(X)$ において合同 mod k に変えたのである．

任意の可換群 G に対して，$kb=0$ を満たすすべての元 b の部分群を表わすのに記号 Tor $(\boldsymbol{Z}_k, G)$ を用いる．上の短完全系列は

$$H_i(X;\boldsymbol{Z}_k) \cong (H_i(X) \otimes \boldsymbol{Z}_k) \oplus \mathrm{Tor}\,(\boldsymbol{Z}_k, H_{i-1}(X))$$

に同値であり，これは**普遍係数公式**とよばれる．

代数において Tor (A, B) は可換群の任意の組 A, B に対して定義され，A と B の **torsion 積**とよばれる．有限生成の A と B に対しては単に $\mathrm{Tor}(A,B)=\mathrm{Tors}\,A \otimes \mathrm{Tors}\,B$ である．ただし，Tors G は有限位数の元から成る G の部分群を表わす．結局，任意の有限生成の G に対して次の公式が得られる：

$$H_i(X;G) \cong (H_i(X) \otimes G) \oplus \mathrm{Tor}\,(G, H_{i-1}(X))$$

演習 有限生成の G に対してこの公式を証明せよ.

例 $H_i(\boldsymbol{R}P^n\,;\boldsymbol{Z}_2)$ を計算する. $\boldsymbol{Z}$ に係数をもつホモロジー群はすでにわかっていて, 次の通りである:

$$\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_2, 0, \boldsymbol{Z}_2, 0, \boldsymbol{Z}_2, 0, \boldsymbol{Z}_2, 0, \cdots$$

ここで普遍係数公式を適用してよい. 群 $H_i(\boldsymbol{R}P^n)\otimes\boldsymbol{Z}_2$ を次々と書くことにより, $\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2, 0, \boldsymbol{Z}_2, 0, \boldsymbol{Z}_2, \cdots$ を得る. 公式の第2項については, $0, 0, \boldsymbol{Z}_2, 0, \boldsymbol{Z}_2, 0, \boldsymbol{Z}_2, 0, \cdots$ を得る.

結局

$$H_*(\boldsymbol{R}P^n\,;\boldsymbol{Z}_2) = \{\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2, \cdots, \boldsymbol{Z}_2, 0, 0, \cdots\}$$

コホモロジーの普遍係数公式も同様に証明され, 任意の有限生成群 G に対して次を得る:

$$H^i(X\,;G) \cong H^i(X\,;\boldsymbol{Z})\otimes G \oplus \mathrm{Tor}\,(G, H^{i+1}(X\,;\boldsymbol{Z}))$$

Künneth 公式

K と L は可換群の鎖複体の組とし, すべての n について $C_n(K)$ は自由可換群と仮定する. このとき次の完全系列がある:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{m+n=r}(H_m(K)\otimes H_n(L)) \xrightarrow{p} H_r(K\otimes L) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{m+n=r-1}\mathrm{Tor}(H_m(K), H_n(L)) \longrightarrow 0$$

ただし, p はホモロジーのテンソル積 (次の§16を参照) であり, β は自然な準同型である. さらにこの系列は split する, すなわち,

$$H_r(K\otimes L) \cong \bigoplus_{m+n=r}(H_m(K)\otimes H_n(L)) \oplus \bigoplus_{m+n=r-1}\mathrm{Tor}(H_m(K), H_n(L))$$

である. しかし, splitting 準同型は自然ではない. これが (可換群の複体に対する) **Künneth 公式**であり, これには重要な特別例, いわゆる **Künneth のテンソル公式**がある.

鎖群 $C_n(K)$ と群 $H_n(K)$ は自由可換群と仮定する. このとき

$$H_r(K\otimes L) \cong \bigoplus_{m+n=r} H_m(K)\otimes H_n(L)$$

が成り立つ. 特に係数群として体 k を選ぶならば,

$$H_r(K\otimes L\,;k) \cong \bigoplus_{m+n=r} H_m(K\,;k)\otimes_k H_n(L\,;k)$$

§16. 積

鎖複体の組 (C,∂) と (C',∂') のテンソル積は次を満たす鎖複体 $(C''=C\otimes C',\ \partial'')$ である：

$$C''_n=\bigoplus_{i+j=n}C_i\otimes C'_j$$

かつ

$$\partial''(c_i\otimes c'_j)=(\partial c_i)\otimes c'_j+(-1)^i c_i\otimes(\partial' c'_j),\ c_i\in C_i,\ c'_j\in C'_j$$

このとき，容易にわかるように，$(\partial'')^2=0$ である．

この定義を幾何学の言葉に翻訳する．K_1 と K_2 は CW 複体とする．これらの直積は K_1 と K_2 の胞体の直積から成る CW 複体である．

鎖は G に値をもつ胞体上の有限の関数であるから，G が環ならば，これらはテンソルとして掛けてよく，その定義域は $K_1\times K_2$ の胞体である．

今，$a=\sum_k a_k\sigma_k^i\in\mathscr{C}_i(K_1\,;\boldsymbol{Z})$, $b=\sum_l b_l\tau_l^j\in\mathscr{C}_j(K_2\,;\boldsymbol{Z})$ とするとき，$a\otimes b=\sum_{k,l}a_kb_l(\sigma_k^i\times\tau_l^j)$ である．幾何学的考察により，$\partial(a\otimes b)=(\partial a)\otimes b+(-1)^i a\otimes(\partial b)$ であり，したがって，$a\in Z_i(K_1\,;\boldsymbol{Z})$ および $b\in Z_j(K_2\,;\boldsymbol{Z})$ ならば，$a\otimes b\in Z_{i+j}(K_1\times K_2\,;\boldsymbol{Z})$ を意味し，それぞれ $H_i(K_1)$ と $H_j(K_2)$ のホモロジー類 $\alpha=\{a\}$ と $\beta=\{b\}$ の**テンソル積** $\alpha\otimes\beta\in H_{i+j}(K_1\times K_2)$ を定義できる．

テンソル積は自然である．すなわち，$f:K_1\to K_1$ と $g:K_2\to K_2$ が写像であり，$f\times g:K_1\times K_2\to L_1\times L_2$ がそれらの積写像ならば，任意の $a\in H_i(K_1)$, $b\in H_j(K_2)$ に対して，$(f_*a)\otimes(g_*b)=(f\times g)_*(a\otimes b)$ が成り立つ．テンソル積は結合的，すなわち，任意の $a\in H_i(K_1), b\in H_j(K_2), c\in H_k(K_3)$ に対して $H_{i+j+k}(K_1\times K_2\times K_3)$ の元 $(a\otimes b)\otimes c$ と $a\otimes(b\otimes c)$ は一致する．さらにテンソル積は反可換，すなわち，$a\in H_i(K), b\in H_j(K)$ かつ $t:K\times K\to K\times K\Leftrightarrow t(x,y)=(y,x)$ であるならば，$t_*(a\otimes b)=(-1)^{ij}(b\otimes a)$ である．

これらすべての事実は容易に証明できる．

テンソル積は，任意の可換環に係数をもつホモロジー群にも，またコホモロジー群にも同様に定義できる．

G は可換環とする．対角写像 $\varDelta:K\to K\times K$ は準同型 $\varDelta^*:H^*(K\times K\,;G)\to H^*(K\,;G)$ を誘導する．任意の $a,b\in H^*(K\,;G)$ に対して，$a\cdot b=\varDelta^*(a\otimes b)$ とおくと，この積は $H^*(K\,;G)$ を反可換環に変える．積の自然性（関手的性質）と結合性，分配法則，反可換性はテンソル積の対応する性質から出る．

単位元の存在

可換環 G が単位元をもっていれば，$H^*(K;G)$ も単位元をもつ．写像 $f: K\to *$ を考える．$H^*(*;G)\cong G$ であるから，この環には単位元がある．これを 1 で表わそう．合成写像 $f^*(1)\in H^0(K;G)$ を考えると，これは環 $H^*(K;G)$ の単位元になる．実際，合成写像

$$K\xrightarrow{\Delta}K\times K\xrightarrow{p}K\times(*)\qquad (\text{ただし，}p(x,y)=x)$$

は任意の $a\in H^*(K;G)$ に対して，$a\otimes 1\in H^*(K\times(*);G)$ という形の元をまず $a\otimes f^*(1)\in H^*(K\times K;G)$ に，ついで $a\cdot f^*(1)\in H^*(K;G)$ に写す．一方，$K=K\times(*)\to K$ は恒等写像であり，したがって，$a\cdot f^*(1)=f^*(1)\cdot a=a$ である．

Hopf 不変量

$H^*(K;G)$ の環構造の最初の応用として，次の興味深い事実，

$\pi_{4n-1}(S^{2n})$ は無限群である

を証明する．これは，自明でない準同型 $\pi_{4n-1}(S^{2n})\to \boldsymbol{Z}$ を構成して証明される．

$\alpha\in\pi_{4n-1}(S^{2n})$ は f により表わされているとし，S^{2n} に $4n$ 次元の胞体を写像 f に沿って接着して CW 複体 $X_\alpha=S^{2n}\cup_f e^{4n}$ を構成する．これは，次元 $0, 2n, 4n$ の 3 個の胞体から成る．胞体双対鎖複体における境界作用素 δ は $\delta\equiv 0$ であり，したがって $H^*(X_\alpha;\boldsymbol{Z})\cong\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$ となる．a と b をそれぞれ $H^{2n}(X_\alpha;\boldsymbol{Z})$ と $H^{4n}(X_\alpha;\boldsymbol{Z})$ の生成元とする．$\dim a=2n$ であるから，$a^2\in H^{4n}(X_\alpha)$，すなわち，$a^2=hb, h\in\boldsymbol{Z}$，を得る．この整数 h を α に対応させ，α の **Hopf 不変量**とよぶ．これは矛盾なく定義されている．すなわち，$h(\alpha)=h$ は明らかにホモトピー類 α の範囲内で f の特別な選択に依存しない．

定理　h は加法的である：$h(\alpha+\beta)=h(\alpha)+h(\beta)$.

証明　$X_{\alpha+\beta}=S^{2n}\cup_{f+g}e^{4n}$ と同時に，同様な複体 $Y_{\alpha,\beta}$ も考えよう．これは次のように構成する．$f\in\alpha, g\in\beta$ とし，写像 $f\vee g: S^{4n-1}\vee S^{4n-1}\to S^{2n}$ を考え，この写像に沿って $e^{4n}\vee e^{4n}$ を S^{2n} に接着して，1 個の零次元胞体，1 個の $2n$ 次元胞体，2 個の $4n$ 次元胞体から成る複体 $Y_{\alpha,\beta}$ を得る．次に，赤道 S^{4n-2} を 1 点に縮めて S^{4n-1} を $S^{4n-1}\vee S^{4n-1}$ の上へ写す：

$$\begin{array}{ccc} S^{2n} & \xleftarrow{f+g} & S^{4n-1} \\ \| & & \downarrow \\ S^{2n} & \xleftarrow{f\vee g} & S^{4n-1}\vee S^{4n-1} \end{array}$$

ここで2つの水平の写像は複体 $X_{\alpha+\beta}$ と $Y_{\alpha,\beta}$ を構成し，垂直の写像 $S^{4n-1}\to S^{4n-1}\vee S^{4n-1}$ は $X_{\alpha+\beta}$ と $Y_{\alpha,\beta}$ の $2n$ 次元胞体を同一視し，$X_{\alpha+\beta}$ の唯1つの $4n$ 次元胞体は $Y_{\alpha,\beta}$ の2個の $4n$ 次元胞体を覆う写像 $X_{\alpha+\beta}\to Y_{\alpha,\beta}$ を与える．この写像は準同型：$H^*(Y_{\alpha,\beta}\,;\boldsymbol{Z})\to H^*(X_{\alpha+\beta}\,;\boldsymbol{Z})$ を誘導する．ただし，$H^*(Y_{\alpha,\beta}\,;\boldsymbol{Z})\cong \underset{(0)}{\boldsymbol{Z}}\oplus\underset{(2n)}{\boldsymbol{Z}}\oplus\underset{(4n)}{\boldsymbol{Z}}\oplus\underset{(4n)}{\boldsymbol{Z}}$ および $H^*(X_{\alpha+\beta}\,;\boldsymbol{Z})\cong\underset{(0)}{\boldsymbol{Z}}\oplus\underset{(2n)}{\boldsymbol{Z}}\oplus\underset{(4n)}{\boldsymbol{Z}}$ である．次元 $2n$ と $4n$ における生成元をそれぞれ a', b_1', b_2' と a, b とすると，$Y_{\alpha,\beta}$ の定義により $b_1'\longmapsto b, b_2'\longmapsto b$ かつ $a'\longmapsto a$ である．さて，$H^*(Y_{\alpha,\beta}\,;\boldsymbol{Z})$ においては $(a')^2=h_1b_1'+h_2b_2'$, $h_1, h_2\in\boldsymbol{Z}$, である．

複体の写像に関するコホモロジー群の自然性の性質により，これは $a^2=(h_1+h_2)b$ を意味する．一方，$a^2=h(\alpha+\beta)b$，すなわち，$h(\alpha+\beta)=h_1+h_2$ である．さて，h は $f\in\alpha$ のみに依存する，すなわち，$g\in\beta$ に独立であることに注意する．$\beta=0$ とおいて，$h_1=h(\alpha)$，まったく同様に，$h_2=h(\beta)$ が得られる．したがって，すでに述べたように $h(\alpha+\beta)=h(\alpha)+h(\beta)$ である．　　（証明終）

この定理により，対応 $\alpha\longmapsto h(\alpha)$ は準同型 $\pi_{4n-1}(S^{2n})\to\boldsymbol{Z}$ である．これが自明でないことを証明しなければならない．積 $S^{2n}\times S^{2n}$ を考え，球面 $S^{2n}\times(*)$ と $(*)\times S^{2n}$ を，2つの球面の対応する点を同一視して，互いに接着する．その結果，次元 $0, 2n, 4n$ に各1個の胞体をもつ複体 X を得る．$4n$ 次元胞体 σ^{4n} の接着写像は，S^{4n-1} を唯1つの胞体 σ^{2n} から成る X の $(4n-1)$ 切片へ写す写像である．$a: S^{4n-1}\to S^{2n}$ をこの写像とし，$\alpha\in\pi_{4n-1}(S^{2n})$ をそのホモトピー類とする．言いかえれば，複体 X は S^{2n} に胞体 e^{4n} を写像 a に沿って接着して得られる，すなわち，X は X_α の型である．このとき，写像 a により表わされる $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ の元 α は零でない $h(\alpha)$ をもつことがわかる．実際，自然な射影

$$S^{2n}\times S^{2n}\to X_\alpha=S^{2n}\underset{\alpha}{\cup}e^{4n}$$

を考えよう．a_1 と a_2 を $H^{2n}(S^{2n}\times S^{2n}\,;\boldsymbol{Z})\cong\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$ の生成元，a, b, d はそれぞれ $H^{2n}(X_\alpha\,;\boldsymbol{Z}), H^{4n}(X_\alpha\,;\boldsymbol{Z}), H^{4n}(S^{2n}\times S^{2n}\,;\boldsymbol{Z})$ の生成元とする．このとき，コホモロジー群において，対応 $a\longmapsto a_1+a_2, b\longmapsto d$，したがって，$a^2\longmapsto(a_1+a_2)^2$

$=a_1^2+2a_1a_2+a_2^2$，すなわち $a^2=h(\alpha)b$ であるから，$h(\alpha)b\longmapsto a_1^2+2a_1a_2+a_2^2$ を得る．ここで K_1 と K_2 が $\boldsymbol{Z}$ 上で torsion をもたない複体ならば，明らかに

$$H^*(K_1\times K_2\,;\,\boldsymbol{Z})\cong H^*(K_1\,;\,\boldsymbol{Z})\otimes H^*(K_2\,;\,\boldsymbol{Z})$$

である．すなわち，今の場合は

$$H^*(S^{2n}\times S^{2n}\,;\,\boldsymbol{Z})\cong H^*(S^{2n}\,;\,\boldsymbol{Z})\otimes H^*(S^{2n}\,;\,\boldsymbol{Z})$$

であるから，$d=a_1\cdot a_2$ であり，したがって，$a_1^2=a_2^2=0$ である．結局 $h(\alpha)\cdot b\longmapsto 2d$ と対応し，主張した通り $h(\alpha)\neq 0$ である．

実は，$\pi_{4n-1}(S^{2n})\cong\boldsymbol{Z}\oplus$(有限群) であるが，ここでは証明しない．次のことはよく知られている：

$$\pi_3(S^2)\cong\boldsymbol{Z},\quad \pi_7(S^4)\cong\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}_{12},$$
$$\pi_{11}(S^6)\cong\boldsymbol{Z},\quad \pi_{15}(S^8)\cong\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}_{120}.$$

§17. 障害理論

X は位相空間，K は CW 複体，$g:K^{n-1}\to X$ は写像とする．ただし，K^{n-1} は K の $(n-1)$ 切片である．g を K^n から X への写像に拡張したい．(これは写像 $f:K\to X$ を各切片から次の切片へ順次拡張して定義する過程における帰納法の段階である．) 以下では，X が $(n-1)$ 連結 (例えば単連結) の場合のみ考える．特性写像 $\chi:D^n\to K$ をもつ胞体 $e^n\subset K$ が与えられているとする．この境界 ∂e^n は $\partial e^n\subset K^{n-1}$ であり $f:K^{n-1}\to X$ はすでに定義されているから，$\partial D^n=S^{n-1}\to K\to X$ を得る．以下の操作の間，胞体 e^n は固定していることに注意する．実際，f を e^n の境界から胞体全体に定義された写像に拡張するのに成功すれば，同様な構成により，その他の胞体にも拡張できて，要求通り写像 $K^n\to X$ を得ることができるから，これで十分なのである．したがって，$f:\partial e^n\to X$ を $\tilde{f}:e^n\to X$ に拡張する問題は写像 $S^{n-1}\to X$ を写像 $D^n\to X$ に拡張する問題に帰着される．

さて，写像 $S^{n-1}\to X$ は $\pi_{n-1}(X)$ の元を定義する．($(n-1)$ 単純性により，この元は基点には依存しない．) よって，写像 $S^{n-1}\to X$ がある写像 $D^n\to X$ に拡張されるための必要十分条件は，最初の写像のホモトピー類が $\pi_{n-1}(X)$ において零となることである．したがって，以上は各 $e^n\subset K$ に $\pi_{n-1}(X)$ の元を対応させたことになる．各胞体 $e^n\subset K^n$ に上の構成を行ない，ついで線型性により $\mathscr{C}_n(K)$ の上に写像を定義して，この対応を準同型 $\mathscr{C}_n(K)\to\pi_{n-1}(K)$ に拡張す

る．このとき，得られる結果は $\pi_{n-1}(X)$ に係数をもつ双対鎖 c_f である．この元 $c_f\in\mathscr{C}^n(K;\pi_{n-1}(X))$ は $f:K^{n-1}\to X$ を K^n の上へ拡張する**障害**とよばれる．明らかに，$f:K^{n-1}\to X$ が K の n 切片の写像へ拡張されるための必要十分条件は $c_f=0$ である．

これまでは問題を再定式化したにすぎなくて，関係式 $c_f=0$ は新しい情報を何ら与えていない．しかし，c_f は多くの興味ある性質をもっていることが間もなくわかる．

定理 1　双対鎖 $c_f\in\mathscr{C}^n(K,\pi_{n-1}(X))$ は双対輪体，すなわち，$\delta c_f=0$ である．

証明　演習において述べた相対 Hurewicz の定理が必要であるので，それをここに再録する．$x_0\in Y\subset X$ とする．$\pi_1(X)=\pi_1(Y)=0$ かつ任意の $k<n$ について $\pi_k(X,Y,x_0)=0$ ならば，任意の $k<n$ について $H_k(X,Y)=0$ であり，かつ $\pi_n(X,Y,x_0)\cong H_n(X,Y,x_0)$ である．

次の図

$$
\begin{array}{ccccl}
\mathscr{C}_{n+1}(K) & = & H_{n+1}(K^{n+1},K^n) & \cong & \pi_{n+1}(K^{n+1},K^n) \\
 & & & & \quad\tilde{\partial}\downarrow \\
\downarrow\partial & & & & \pi_n(K^n) \\
 & & & & \quad j_*\downarrow \\
\mathscr{C}_n(K) & = & H_n(K^n,K^{n-1}) & \cong & \pi_n(K^n,K^{n-1}) \\
 & \searrow & & & \quad\partial'\downarrow \\
 & & i & & \pi_{n-1}(K^{n-1}) \\
 & & & & \quad f_*\downarrow \\
 & & & & \pi_{n-1}(X)=\text{係数群}
\end{array}
$$

において横列の同型は相対 Hurewicz の同型を表わす．定義により，境界作用素 $\partial:\mathscr{C}_{n+1}(K)\to\mathscr{C}_n(K)$ は，3対 (K^{n+1},K^n,K^{n-1}) の完全系列において対応する境界準同型である．Hurewicz の定理により，これは同じ3対のホモトピー完全系列の境界準同型

$$\pi_{n+1}(K^{n+1},K^n)\to\pi_n(K^n,K^{n-1})$$



に帰着される．構成により，これは普通の境界準同型 $\tilde{\partial}$ と絶対球写像から相対球写像への射入 j の誘導する j_* に分解する：

$$\pi_{n+1}(K^{n+1}, K^n)\xrightarrow{\tilde{\partial}}\pi_n(K^n)\xrightarrow{j_*}\pi_n(K^n, K^{n-1})$$

この3項の系列は3対の完全系列に含まれていないことに注意する．前ページの図式の準同型 ∂' も普通の境界準同型であり，f_* は $f: K^{n-1}\to X$ により誘導された準同型である．

$\mathscr{C}_{n+1}, \mathscr{C}_n, \pi_{n+1}, \pi_n$ から成る正方形は明らかに可換である．準同型 $c_f^n: \mathscr{C}_n(K)\to\pi_{n-1}(K)$ を考える．これは合成 $f_*\circ\partial'$ である．

双対鎖 $\delta c_f^n\in\mathscr{C}^{n+1}(K)$ は準同型 $\mathscr{C}_{n+1}(K)\to\pi_{n-1}(X)$ を定義し，(∂' と j_* は対 (K^n, K^{n-1}) の完全系列における連続した準同型であるので) $\partial'\circ j_*=0$ であるから，$\delta_f^n c=c_f^n\circ\partial=f_*\circ\partial'\circ j_*\circ\tilde{\partial}=0$ を満たす．　(証明終)

双対輪体 c_f^n のコホモロジー類を C_f^n と表わす．したがって，$C_f^n\in H^n(K; \pi_{n-1}(X))$ である．

定理2　$C_f^n=0$ であるための必要十分条件は，K^{n-2} 上では変えず K^{n-1} 上では適当に変えた後の $f: K^{n-1}\to X$ が写像 $\tilde{f}: K^n\to X$ に拡張できることである．

証明の前に，以下，有用になる概念を1つ導入する．写像 $f, g: K^{n-1}\to X$ は $x\in K^{n-2}$ に対して $f(x)=g(x)$ を満たすとする．$\sigma^{n-1}\subset K^{n-1}$ は特性写像 $\chi: D^{n-1}\to K$ をもつ任意の胞体とするとき，$\chi(\partial D^{n-1})\subset K^{n-2}$ であるから，写像 $f\circ\chi$ と $g\circ\chi$ は ∂D^{n-1} 上で一致する．さて，f と g は胞体 σ^{n-1} では異なっているが，それらの像は ∂D^{n-1}の像に沿って互いに接着されている，すなわち，$\pi_{n-1}(X)$ の元を定義する X への球写像を得る．実際，各胞体 σ^{n-1} に $\pi_{n-1}(X)$ の元を対応させる双対鎖を得たことになる．これを $d_{f,g}^{n-1}$ と表わし，f と g の**差双対鎖**という．したがって，$d_{f,g}^{n-1}\in\mathscr{C}^{n-1}(K; \pi_{n-1}(X))$ である．

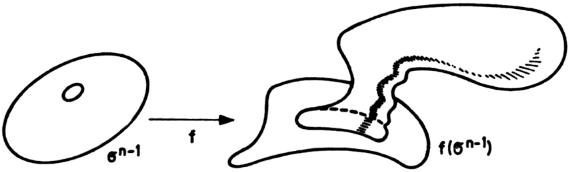
明らかに，$d_{f,g}^{n-1}=0$ であるための必要十分条件は，f と g を結ぶ K^{n-2} 上で停常的(そこでは $f=g$)なホモトピーが存在することである．

補題1　写像 $f: K^{n-1}\to X$ と双対鎖 $d\in\mathscr{C}^{n-1}(K; \pi_{n-1}(X))$ に対して写像 $g: K^{n-1}\to X$ が存在して，$d=d_{f,g}^{n-1}$ かつ $g|_{K^{n-2}}=f|_{K^{n-2}}$ を満たす．

実際，任意の胞体 σ^{n-1} とその像 $f(\sigma^{n-1})\subset X$ を考える．この胞体の中心に小さい球体をとり，$f(\sigma^{n-1})$ からその像を切り取る．次にその場所に双対鎖 d の

σ^{n-1} における $\pi_{n-1}(X)$ での値を表わす球写像を接着する．

さて，この球写像にふくらませた球体の上を除いてはいたる所で f と一致するように g を定義する．同様に，各胞体で f を変更して，補題で述べられているように，最終的に $d=d_{f,g}^{n-1}$ となる写像 g を得る．

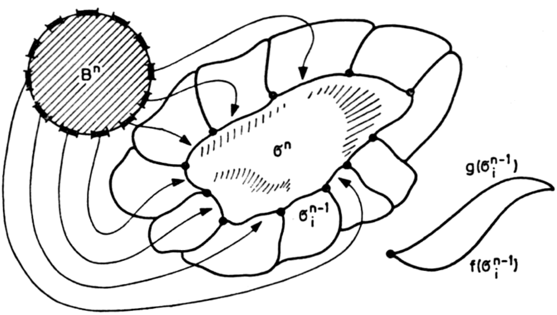


補題 2　$\delta d_{f,g}^{n-1}=c_f^n-c_g^n$（すなわち，$d_{f,g}^{n-1}$ は双対輪体ではない）．

証明　まず

$$(\delta d_{f,g}^{n-1})(\sigma^n)=d_{f,g}^{n-1}(\partial\sigma^n)=\sum_i[\sigma^n:\sigma_i^{n-1}]d_{f,g}^{n-1}(\sigma_i^{n-1})$$

である．ここで $[\sigma^n:\sigma_i^{n-1}]$ の定義を思いおこそう．胞体 σ^n の特性写像 $\chi:D^n\to K$ が存在して，$\chi|s^{n-1}$ と射影 $K^{n-1}\to K^{n-1}/K^{n-2}$ との合成写像 $\partial D^n=S^{n-1}\to K^{n-1}\to K^{n-1}/K^{n-2}=\vee S_i^{n-1}$ において $[\sigma^n:\sigma_i^{n-1}]$ は写像 $S^{n-1}\to S_i^{n-1}$ の写像度である．すでに証明されたように，写像 $\chi|s^{n-1}:S^{n-1}\to K^{n-1}$ は有限個の球体 D_i^{n-1} を除いては球面全体を K^{n-2} に写し，これらの球体を写像度 ±1 で胞体 σ_i^{n-1} の上へ写す写像にホモトープである．σ_i^{n-1} の上へ写される球体の個数は実



は結合係数に等しい．上の絵で太線の部分は，S^{n-1} 上で選ばれた小さい球体 D_i^{n-1} を表わしている．さて，胞体 σ^n 上で双対鎖 $c_f^n-c_g^n$ がとる値，すなわち，

それぞれ f と g を適用したとき，この小さい球体はどこへ行くのか調べよう．$x \in K^{n-2}$ に対して $f(x)=g(x)$ であるから，各胞体 σ_i^{n-1} 上の $c_f^n - c_g^n$ の値は小さい球体が σ_i^{n-1} の上へ写される回数倍，すなわち，結合係数倍した差双対鎖 $d_{f,g}^{n-1}$ の σ_i^{n-1} 上の値である球写像となる．このとき，胞体全体 σ^n には和 $\sum_i [\sigma^n : \sigma_i^{n-1}] d_{f,g}^{n-1}(\sigma_i^{n-1})$ が対応し，明らかにこれは $(\delta d_{f,g}^{n-1})(\sigma^n)$ と一致するから，補題は証明された．　（証明終）

定理2の証明　写像：$K^n \to X$ に拡張できる写像 $g : K^{n-1} \to X$ が存在して，$g|_{K^{n-2}} = f|_{K^{n-2}}$ を満たすと仮定する．このとき $c_g^n = 0$ かつ（補題2により）$\delta d_{f,g}^{n-1} = c_f^n$，したがって $C_f^n = 0$ である．逆に，もし $C_f^n = 0$ ならば $c_f^n = \delta d$ となる $d \in \mathscr{C}^{n-1}(K, \pi_{n-1}(X))$ がある．補題1によれば K^{n-2} 上で f と一致する写像 $g : K^{n-1} \to X$ が存在して $d_{f,g}^{n-1} = d$ となる．（補題2により）$c_g^n = c_f^n - \delta d_{f,g}^{n-1} = c_f^n - \delta d = 0$，すなわち，$g$ は写像 $K^n \to X$ に拡張できる．　（証明終）

障害と差双対鎖についていくつかの明らかな性質を述べる．

(1)　写像 $f, g : K^{n-1} \to X$ がホモトープならば $c_f^n = c_g^n$ である．

(2)　K_1 と K_2 は2つの複体，$f : K_2^{n-1} \to X$ と $\varphi : K_1 \to K_2$ は胞体写像とする．写像 $g : K_1^{n-1} \to X \Longleftrightarrow g(x) = f(\varphi(x))$ を考える．もし φ により誘導される準同型を $\hat{\varphi} : \mathscr{C}^n(K_2) \to \mathscr{C}^n(K_1)$ で表わすならば，$c_g^n = \hat{\varphi}(c_f^n)$，すなわち，障害は複体の胞体写像に関して自然である．

(3)　f, g, h が K^{n-1} から X への写像で，K^{n-2} 上で $f=g=h$ ならば，

$$d_{f,g}^{n-1} + d_{g,h}^{n-1} = d_{f,h}^{n-1}$$

(4)　写像 $f, g : K_2^{n-1} \to X$ が K_2^{n-2} 上で $f=g$ であるとし，かつ写像 $\varphi : K_1^{n-1} \to K_2^{n-1}$ が与えられているとする．このとき

$$d_{f\circ\varphi,\, g\circ\varphi}^{n-1} = \hat{\varphi} d_{f,g}^{n-1}$$

(5)　$d_{f,g}^{n-1} = -d_{g,f}^{n-1}$

相対的な場合

$L \subset K$ が部分複体で f が $K^{n-1} \cup L$ の上で定義されているならば，f を写像 $K^n \cup L \to X$ に拡張する障害は $\mathscr{C}^n(K, L\,;\,\pi_{n-1}(X))$ にあり，これはコホモロジー類が $H^n(K, L\,;\,\pi_{n-1}(X))$ に属する（相対）双対輪体である．「相対的」な障害理論は絶対的な場合に平行に展開できるので，ここでは詳細には立ち入らず

に，相対的障害と差双対鎖の間の興味ある関連性を述べるにとどめるが，これはさらにいくつかの例において重要な役割を果たす．写像 $f, g: K\to X$ は K の n 切片で一致する（またはホモトープである）と仮定する．このとき，$F|_{K^n\times I}$ を $f|_{K^n}$ と $g|_{K^n}$ の間のホモトピー，$x\in K$ に対して $F(x,0)=f(x), F(x,1)=g(x)$ と定義することにより，写像 $F: (K^n\times I)\cup(K\times\partial I)\to X$ を得る．$L=K\times I, M=K\times\partial I$ と表わすと，明らかに $K^n\times I\cup K\times\partial I=L^{n+1}\cup M$ である．F を $L^{n+2}\cup M$ に拡張する障害は $\mathscr{C}^{n+2}(L, M; \pi_{n+1}(X))=\mathscr{C}^{n+2}(\Sigma K; \pi_{n+1}(X))\cong\mathscr{C}^{n+1}(K; \pi_{n+1}(X))$ にあり，これが $d_{f,g}^{n+1}$ に等しいことは容易にわかる．さて，f と g は K 全体で定義されているから，$\delta d_{f,g}^{n+1}=c_f^{n+2}-c_g^{n+2}=0$ である．したがって，$f, g: K\to X$ が K^n 上で一致し，K 全体で定義されているならば，それらの差双対鎖は障害として表わすことができる．

この場合に定理 2 を適用して次の結果を得る．

定理 3　写像 $f, g: K\to X$ は K^n 上で一致するとする．このとき，$d_{f,g}^{n+1}\simeq 0$ であるための必要十分条件は，$f|_{K^{n+1}}\simeq g|_{K^{n+1}}\ \mathrm{rel}\ K^{n-1}$ である（$\Longleftrightarrow K^{n-1}$ 上で定値なホモトピーで結ばれる）．

この定理の応用として，コホモロジー群と§2 で述べた $K(\pi, n)$ への写像との関連性を示そう．

系　$H^n(X; \pi)\cong[X, K(\pi, n)]$

合成 $\mathscr{C}_n(K(\pi, n))\to H_n(K(\pi, n))\cong\pi_n(K(\pi, n))\cong\pi$ を考える．ただし，$\mathscr{C}_{n-1}(K(\pi, n))=0$ である（$K(\pi, n)$ の胞体構造は§10 で与えられている）ので，$\mathscr{C}_n(K(\pi, n))$ は輪体群と一致し，$H_n(K(\pi, n))$ は $\mathscr{C}_n(K(\pi, n))$ の商群となるから，最初の準同型は自然な射影であり，この結果が $\mathscr{C}^n(K(\pi, n); \pi)$ における双対鎖 e である．もう 1 つの説明：$K(\pi, n)$ の各 n 次元胞体は群 π の 1 つの元に対応し，これは線型性により準同型 $\mathscr{C}_n(K(\pi, n))\to\pi$ に拡張できる．こうして出てくる双対鎖 $e\in\mathscr{C}^n(K(\pi, n); \pi)$ は射入 $f: K(\pi, n)^n\to K(\pi, n)$ と定値写像 $g: K(\pi, n)^n\to K(\pi, n)$ の差双対鎖としても解釈できる．すなわち，これらはいずれも $K(\pi, n)\to K(\pi, n)$ に拡張され，したがって，$c_f^n=c_g^n=0$ かつ $\delta e=\delta d_{f,g}^n=0$，すなわち，$e$ は双対輪体である．

e のコホモロジー類は $K(\pi, n)$ の**基本コホモロジー類**とよばれ，$e\in H^n(K(\pi, n); \pi)$ とも表わされる．$\pi_0(X)=\cdots=\pi_{n-1}(X)=0$ $(n>1)$ を満たす任意の空間 X の**基本類** $e_X\in H^n(X; \pi_n(X))$ も同様に定義できることに注意する．後ほど

この概念に戻ろう．

定理 任意のCW複体Xに対して，$f: X \to K(\pi, n)$に類$f^*(e) \in H^n(X;\pi)$を対応させる写像は，$H^n(X;\pi)$とXから$K(\pi, n)$への写像のホモトピー類の集合$[X, K(\pi, n)]$との間の一対一対応を与える．

（この定理はすでに§2で予告されている．）

証明 $\alpha \in H^n(X;\pi)$とする．このとき，写像fが存在して$f^*(e)=\alpha$となることを証明する．aはαを表わすとする．上の性質を満たす写像$f: X \to K(\pi, n)$を以下のように構成する．まずfはX^{n-1}を$K(\pi, n)$の基点に写すと仮定してよい．次に，fをX^n上で定義する．e^nをXのn胞体とするとき，$a(e^n) \in \pi$である．胞体e^nの境界は1点に写されるから，写像は$K(\pi, n)$への球写像となる．この写像として$a(e^n)$を表わす任意の球写像を選ぶ．明らかに，$a \in \mathscr{C}^n(X;\pi)$は$f: X^n \to K(\pi, n)$と定値写像$g: X^n \to K(\pi, n)$の間の差双対鎖である．$0=\delta a=c_f^n-c_g^n=c_f^n$である（$g$は$X$全体に拡張するから$c_g^n=0$），すなわち，$c_f^n=0$であり，$f$の構成は$X^{n+1}$上で続けてよい．これを$X^{n+2}, X^{n+3}, \cdots$などに拡張する障害は自明な群，すなわち，$\pi_{n+1}(K(\pi, n))=\pi_{n+2}(K(\pi, n))=\cdots=0$にある．したがって，写像$f: X \to K(\pi, n)$が存在する．合成$\mathscr{C}_n(X) \xrightarrow{f_*} \mathscr{C}_n(K(\pi, n)) \xrightarrow{e} \pi$は明らかに$a$と一致し，$f^*(e)=\alpha$となる．

任意の写像の組$f, g: X \to K(\pi, n)$に対して，等式$f^*(e)=g^*(e)$は$f \simeq g$を意味することを示すのが残っている．このためには，胞体的なfとgを考えれば十分である．$K(\pi, n)^{n-1}=*$であるから$f|_{X^{n-1}}=g|_{X^{n-1}}$は直ちにわかる．したがって，$f|_{X^n}$と$g|_{X^n}$は，上の証明の最初の部分と同様に，ある双対輪体$a, b \in \mathscr{C}^n(X;\pi)$に対応する．実際，これらの双対輪体は，$f$と$g$により定義される双対鎖準同型による$e \in \mathscr{C}^n(K(\pi, n))$の像である．さらに，$a=d_{f,h}^n$かつ$b=d_{g,h}^n$である．ただし，$h: X^n \to K(\pi, n)$は1点への写像であり，このとき$d_{f,h}^n=-d_{g,h}^n=a-b \sim 0$を得る．

定理3により，$f|_{X^n} \simeq g|_{X^n}$，すなわち，gは(Borsukの定理により）$f|_{X^n}=\tilde{g}|_{X^n}$を満たす写像$\tilde{g}: X \to K(\pi, n)$にホモトープである．さて，差双対鎖は自明な群に係数をとるので，fと$\tilde{g}$は明らかにホモトープである．（証明終）

ファイバー空間の切断を拡張する障害

(E, B, F, p)はファイバー空間とする．（局所自明性とかSerreファイバー空

間とかはここでは問題にはならない.）今，ファイバーは単純であり，底空間は単連結と仮定する.（底空間の単連結性は実は必要でない．実際，次の意味で「単純な」ファイバー空間であればよい．すなわち，もし $s_1, s_2 : I \to B$ が点 $x, y \in B$ を結ぶ道であり，$\varphi_t, \psi_t : p^{-1}(x) \to E$ は $\varphi_0 \equiv \psi_0, p^{-1}(x) \subset E, \varphi_t(p^{-1}(x)) \subset p^{-1}(s_1(t)), \psi_t(p^{-1}(x)) \subset p^{-1}(s_2(t))$ を満たすホモトピー（被覆ホモトピー定理によりこれらの存在は保証されている）ならば，写像 $\varphi_1, \psi_1 : p^{-1}(x) \to E$ はホモトープである．この仮定は，有向多様体の単位接ベクトルの例が示すように，単連結でない底空間の場合にも満たされる.）

B は CW 複体であり，底空間の $(n-1)$ 切片上の切断が与えられていると仮定する．e^n は底空間の n 次元胞体とし，$f : D^n \to B$ は特性写像とするとき，D^n 上で f により誘導されるファイバー空間は自明である．$(n-1)$ 切片上の切断は $\partial D^n = S^{n-1}$ 上の誘導ファイバー空間の切断，すなわち，写像 $S^{n-1} \to D^n \times F$，すなわち，$\pi_{n-1}(D^n \times F) \cong \pi_{n-1}(F)$ の元を与える．（ここでファイバー空間は局所自明であると仮定したが，状況は Serre ファイバー空間の場合でも同じである．実際，底空間の単連結性からわかるように，任意のファイバーと標準的なファイバーの間に $(n-1)$ 次元ホモトピー群の標準的同型が存在する.）各胞体 σ^n に $\pi_{n-1}(F)$ の元を対応させる写像は $\mathscr{C}^n(B ; \pi_{n-1}(F))$ の双対鎖 c^n を与える．その性質は写像を拡張する障害の性質と同様に証明できる．ここに，それらの性質を証明を与えずに列挙する．

(1)　切断が底空間の n 切片上の切断に拡張される $\Leftrightarrow c^n = 0$.

(2)　$\delta c^n = 0$.

(3)　双対輪体 c^n のコホモロジー類は零である $\Leftrightarrow$ 切断を底空間の $(n-2)$ 切片上では変えずに，n 切片全体に拡張するように $(n-1)$ 切片上で切断を変えることができる．

差双対鎖もこの場合定義できる．写像を拡張する障害の概念は切断を拡張する障害のもっと一般な概念の特別な場合である．実際，任意の写像 $K \to X$ は自明なファイバー空間の切断であるグラフ $K \to K \times X$ に同値である．写像あるいはそのグラフを拡張する障害は同じである．一方，切断の障害の概念は，次の注意からわかるように，写像の障害の特別な場合には帰着されない．$\pi_0(F) = \cdots = \pi_{n-1}(F) = 0$ とする．切断を底空間の k 切片に拡張する障害は自明な群に値をとるので $k<n$ については零であるが，この切断を n 切片に拡張する障害

はもはや必ずしも自明ではない．そのコホモロジー類は $H^n(B;\pi_{n-1}(F))$ にあり，障害は前の切片上で切断が何であるかに無関係である．この事実はほとんど明らかであり，差双対鎖と補題2の類似（すなわち，公式 $\delta d^{n-1}_{f,g}=c^n_f-c^n_g$）を用いて証明される．したがって，コホモロジー類はファイバー空間のみにより定義され，ファイバー空間の**特性類**とよばれる．

演習　（特性類の基本的性質）$\xi\in H^n(B;\pi_{n-1}(F))$ がファイバー空間 (E,B,F,p) の特性類ならば，写像 $f:B'\to B$ により誘導されるファイバー空間の特性類は $f^*(\xi)$ であることを証明せよ．

演習　ファイバー空間の特性類は底空間上で与えられた特別な胞体構造に無関係であることを証明せよ．

なお，次の興味ある所見を付け加えよう．$\pi_0(X)=\cdots=\pi_{n-1}(X)=0$ とするとき，$H^n(X;\pi_{n-1}(\Omega X))\cong H^n(X;\pi_n(X))$ の元とみなされる Serre ファイバー空間 $EX\xrightarrow{\Omega X}X$ の特性類は X の基本類に他ならない．

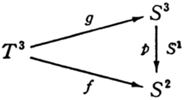
演習　これを証明せよ．

（これにより，この概念の不変性がわかる．）

付録 1　写像の2つの注目すべき例

ホモトピー群が消えている十分良い位相空間，例えばCW複体，は可縮であることが証明された．さらに，この空間が単連結ならば，これはホモロジー群の自明性からもわかる．

今，ある写像がホモトピー群またはホモロジー群の間の零準同型を誘導すると仮定する．これは定値写像に必ずホモトープか？　次の反例に示されるように，ホモトピー群とホモロジー群の両者で自明である写像についても答は否定的である．$p:S^3\to S^2$ は Hopf ファイバー空間とし，2切片を1点に縮めて得られる3次元輪環面 $T^3=S^1\times S^1\times S^1$ から S^3 の上への写像を g とする．このとき，合成写像 $f=p\circ g:T^3\to S^2$ は零ホモトープではない．実際，零ホモトー



プならば，被覆ホモトピー定理により問題のホモトピーを S^3 において被覆で

き，これは $g:T^3\to S^3$ が T^3 を S^1 に写す写像にホモトープであることを意味し，したがって，S^1 は S^3 において可縮であるので，g も零ホモトープになる．

さて，$f:T^3\to S^2$ によりどのような準同型がコホモロジー群とホモトピー群において誘導されるか調べよう．次元を考慮することにより準同型 $f^*:H^i(S^2)\to H^i(T^3)$ は自明であることが直ちにわかる．ホモトピー群については，$\pi_1(T^3)\cong \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}$ かつ $\pi_k(T^3)=0, k\geq 2$，および $\pi_1(S^2)=0$ であるので，準同型 $f_*:\pi_i(T^3)\to\pi_i(S^2)$ も自明である．

このような奇妙な写像の存在は，T^3 が単連結ではないという事実や同様に他の多くの現象にどうも関連しているに違いないという疑問が，位相幾何学を学んだ人には自然におこるであろう．しかし，今の場合，単連結な空間のみを含む次の構成において示されるように，これは特に重要な意味はもっていない．$X=S^{2n-2}\times S^3$ とする．このとき，X は次元 $0,3,2n-2,2n+1$ に各 1 個の胞体をもつ複体である．$2n$ 切片を 1 点に縮めて得られる写像を $g:S^{2n-2}\times S^3\to S^{2n+1}$ とし，$p:S^{2n+1}\to \boldsymbol{C}P^n$ はファイバー S^1 をもつファイバー空間とする．このとき合成写像 $p\circ g:S^{2n-2}\times S^3\to S^{2n+1}\to \boldsymbol{C}P^n$ は，ホモロジー群とホモトピー群の自明な準同型を誘導するが，上と同様に証明されるように，零ホモトープではない．実際，ホモロジー群の間の準同型は，$\dim \boldsymbol{C}P^n=2n$ であり，S^{2n+1} を通過するので，自明である．ホモトピー群の場合はもっとやさしい．実際，$g:S^{2n-2}\times S^3\to S^{2n+1}$ は

$$S^{2n-2}\vee S^3 \xrightarrow{\text{埋込み}} S^{2n-2}\times S^3 \longrightarrow S^{2n+1}$$

において，$S^{2n-2}\vee S^3$ を 1 点に写して得られており，一方，$\pi_k(S^{2n-2}\times S^3)$ の元を表わす写像 $f:S^k\to S^{2n-2}\times S^3$ は写像の組 $(f_1,f_2), f_1:S^k\to S^{2n-2}$ と $f_2:S^k\to S^3$，として与えられるので，g により 1 点に写される．したがって，f は定値写像にホモトープであり，g は零準同型を誘導する．

付録 2　Puppe の完全系列

X' と X は任意の CW 複体とし，$f:X'\to X$ は任意の写像とする．さらに空間 Y と基点のある集合 $[X',Y]_*$, $[X,Y]_*$, $[Y,X']_*$, $[Y,X]_*$ を考える．任意の写像 α に対して，集合 $[\cdots,\cdots]_*$ の対応する元を $[\alpha]$ で表わす．3 項から成る系列 $X'\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}X''$ が**完全**であるというのは，任意の空間 Y に対して，系列

$$[Y, X']_* \xrightarrow{f_*} [Y, X]_* \xrightarrow{g_*} [Y, X'']_*$$

が完全であるときである．(**完全性**とは基点の逆像が前の集合の像と一致することを意味する.)

双対的に，系列が**双対完全**であるとは，任意の Y に対して次の系列

$$[X'', Y]_* \xrightarrow{g^*} [X, Y]_* \xrightarrow{f^*} [X', Y]_*$$

が完全であるときである．系列 $\cdots \to X_{n+1} \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \to \cdots$ は 3 項から成る部分系列 $X_{i+1} \to X_i \to X_{i-1}$ が完全（または双対完全）であるとき，**完全**（または**双対完全**）であるという．

写像 f の錐を $C_f = X \underset{f}{\cup} CX'$ で表わし，CW 複体の次の系列

$$X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{i} C_f \xrightarrow{j} \Sigma X' \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma i} C_{\Sigma f} \xrightarrow{\Sigma j} \cdots$$

を構成する．ただし，i は埋込み，$j: C_f \to C_f/X = \Sigma X'$ は自然な射影，Σf は f の懸垂写像などである．

定理 1　任意の写像 $f: X' \to X$ に対して，次の系列は双対完全である：

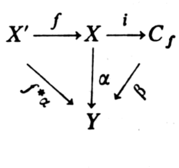
$$X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{i} C_f \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\Sigma^n f} \Sigma^n X \xrightarrow{\Sigma^n i} \Sigma^n C_f \xrightarrow{\Sigma^n j} \Sigma^{n+1} X' \longrightarrow \cdots$$

$$\Sigma^n C_f = C_{\Sigma^n f}$$

証明　まず，$X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{i} C_f$ の双対完全性，すなわち，任意の Y について次の完全性を証明する：

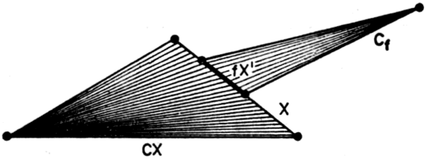
$$[C_f, Y]_* \xrightarrow{i^*} [X, Y]_* \xrightarrow{f^*} [X', Y]_*$$

今，$[\alpha] \in [X, Y]_*$, $[\beta] \in [C_f, Y]_*$ かつ $\alpha = i^*(\beta)$ とする．すなわち，次の可換な図式



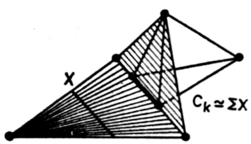
をもつとする．$f^*\alpha=\alpha\circ f=\beta\circ i\circ f$ により，写像 $f^*\alpha$ は錐 C_f の写像に拡張される，すなわち，$f^*[\alpha]=0$ である．逆に，$f^*[\alpha]=0$ と仮定する．このとき図式により $\alpha=\beta\circ i$，ただし，β は f を定値写像に結ぶホモトピーとして与えられている．したがって，双対完全性は証明された．

次に，$C_i\simeq C_i/CX\simeq C_f/X\simeq \Sigma X'$，ただし，$CX$ は X 上の錐，であることに注意する．



すでに証明されたように，系列 $X'\xrightarrow{f}X\xrightarrow{i}C_f\xrightarrow{K}C_i\xrightarrow{t}C_k$ は双対完全である．ここで図式

$$
\begin{array}{ccccc}
C_f & \xrightarrow{K} & C_i & \xrightarrow{t} & C_k \\
 & \searrow & p_1\downarrow\simeq & & p_2\downarrow\simeq \\
 & & \Sigma X' & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma X
\end{array}
$$



は明らかに可換である．ただし，p_1 と p_2 はホモトピー同値写像，$j: C_f\to C_f/X$ は自然な射影，Σf は f の懸垂である．これは 5 項から成る系列 $X'\xrightarrow{f}X\xrightarrow{i}C_f\xrightarrow{j}\Sigma X'\xrightarrow{\Sigma f}\Sigma X$ の双対完全性を証明している． 双対完全性を失うことなくこれを右に拡張するために，次の簡単な事実に注意する：もし $X'\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}X''$ が双対完全ならば，系列 $\Sigma X'\xrightarrow{\Sigma f}\Sigma X\xrightarrow{\Sigma g}\Sigma X''$ も双対完全である．実際，$[\Sigma X, Y]_*=[X, \Omega Y]_*$ により図式

$$\begin{array}{ccccc} [\Sigma X'', Y]_* & \xrightarrow{(\Sigma g)^*} & [\Sigma X, Y]_* & \xrightarrow{(\Sigma f)^*} & [\Sigma X', Y]_* \\ \updownarrow\cong & & \updownarrow\cong & & \updownarrow\cong \\ [X'', \Omega Y]_* & \xrightarrow{g^*} & [X, \Omega Y]_* & \xrightarrow{f^*} & [X', \Omega Y]_* \end{array}$$

は可換であり，下の横列は完全であることはわかっているから，上の横列も完全である．以上より，次の系列が双対完全であることがわかる：

$$\Sigma^n X' \xrightarrow{\Sigma^n f} \Sigma^n X \xrightarrow{\Sigma^n i} C_{\Sigma^n f} \xrightarrow{\Sigma^n j} \Sigma^{n+1} X' \xrightarrow{\Sigma^{n+1} f} \Sigma^{n+1} X$$

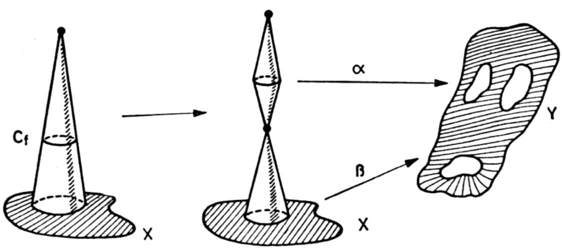
今，次の完全系列を考えよう：

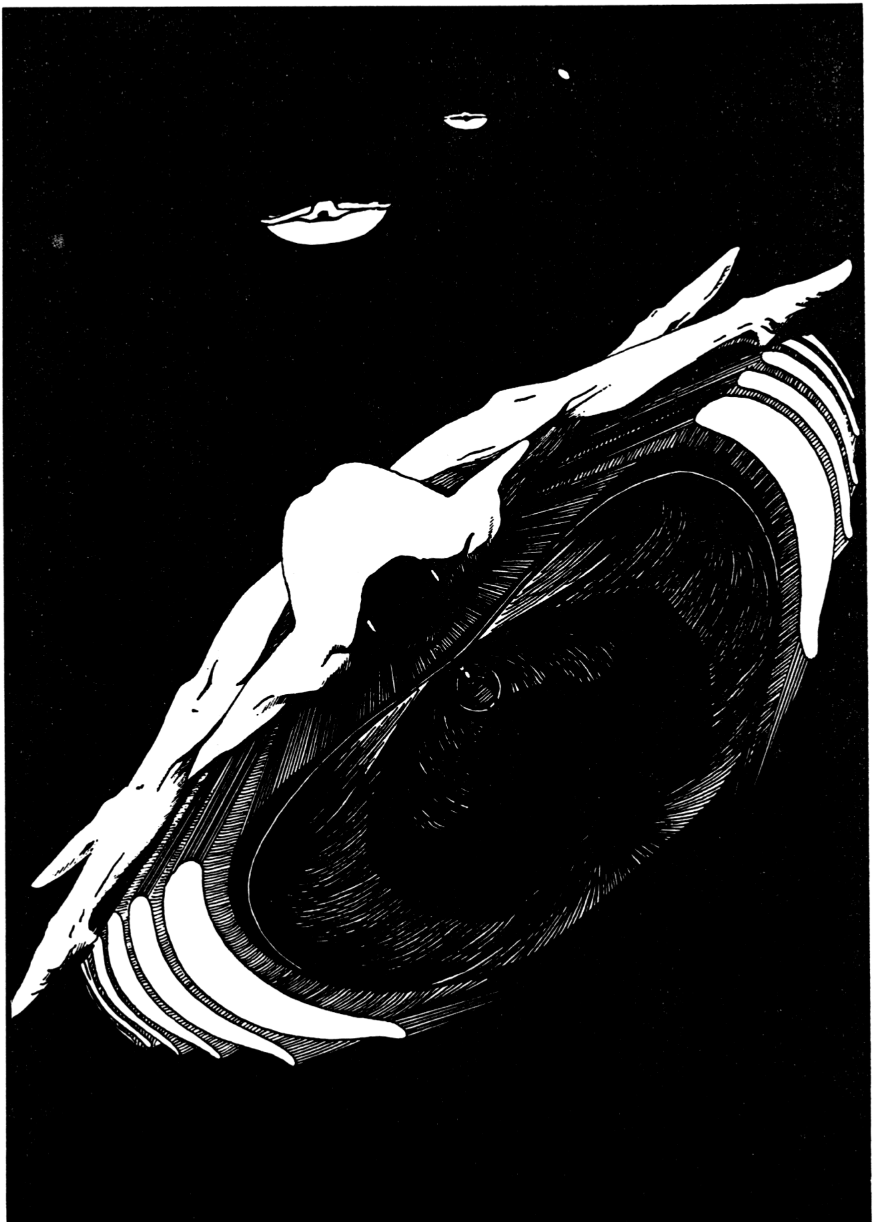
$$[X', Y]_* \xleftarrow{f^*} [X, Y]_* \xleftarrow{i^*} [C_f, Y]_* \xleftarrow{j^*} [\Sigma X', Y]_* \longleftarrow \cdots$$

$$\cdots \longleftarrow [\Sigma^n X', Y]_* \xleftarrow{\Sigma^n f^*} [\Sigma^n X, Y]_* \xleftarrow{\Sigma^n i^*} [C_{\Sigma^n f}, Y]_* \xleftarrow{\Sigma^n j^*} [\Sigma^{n+1} X', Y]_* \longleftarrow \cdots$$

この系列は最初の 3 項を除いてすべて群であり，最初の 3 つの群を除いてすべて可換群である．また群の間の写像は準同型である．最初の 3 項は基点をもつ単なる集合であり，f^*, i^*, j^* は基点を保つ集合の間の写像である．以下でわかるように，群 $[\Sigma X', Y]_*$ は集合 $[C_f, Y]_*$ へ左から作用し，この集合を軌道の集合に分割する．このとき，この軌道の集合は i^* により一対一に集合 $[X, Y]_*$ に写される．ここで $[\Sigma X', Y]$ の $[C_f, Y]_*$ への作用は次のように与えられる．$[\alpha] \in [\Sigma X', Y]_*$ と $[\beta] \in [C_f, Y]_*$ に対して，次の写像を $\alpha \oplus \beta$ により表わす：

$$\begin{cases} (\alpha \oplus \beta)(x', t) = \begin{cases} \alpha(x', 2t) & 0 \le t \le \dfrac{1}{2},\ x' \in X' \\ \beta(x', 2t-1) & \dfrac{1}{2} \le t \le 1,\ x' \in X' \end{cases} \\ (\alpha \oplus \beta)(x) \quad = \beta(x) \quad x \in X \end{cases}$$





注意　明らかに，$(\alpha \obar \beta)|_X=\beta|_X$.

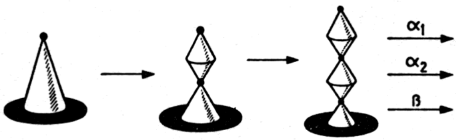
次の命題は容易に証明できる：

(i)　$\alpha_1\simeq\alpha_2$ かつ $\beta_1\simeq\beta_2$ ならば $\alpha_1\obar\beta_1\simeq\alpha_2\obar\beta_2$.　同様に，$\alpha_1\simeq\alpha_2$ かつ $\beta_1\simeq\beta_2$ rel X ならば $\alpha_1\obar\beta_1\simeq\alpha_2\obar\beta_2$ rel X.（ここで，rel X は X 上で停常的なホモトピーの存在を意味する.）

(ii)　$(*)$ が定値写像を表わすならば $(*)\obar\beta\simeq\beta$ rel X.

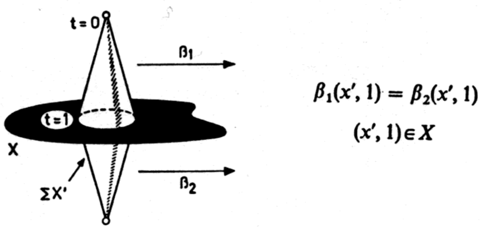
(iii)　$(\alpha_1\oplus\alpha_2)\obar\beta\simeq(\alpha_1\obar(\alpha_2\obar\beta))$ rel X，ただし，$\oplus$ は群 $[\Sigma X', Y]_*$ における群作用である.

(iv)　$\alpha_1\obar(\alpha_2\circ j)\simeq((\alpha_1+\alpha_2)\circ j)$ rel X，ただし $j: C_f\to\Sigma X'$ は自明な射影である.



さらに，$\beta_1|_X=\beta_2|_X$ を満たす類 $[\beta_1], [\beta_2]\in[C_f, Y]$ に対して β_1 と β_2 により表わすことができる演算 $d(\beta_1, \beta_2)$ を導入する．写像 $d(\beta_1, \beta_2): \Sigma X'\to Y$ は次の式により定義される：

$$d(\beta_1,\beta_2)(x',t)=\begin{cases}\beta_1(x',2t) & 0\le t\le \frac{1}{2},\ x'\in X' \text{ のとき}\\ \beta_2(x',2-2t) & \frac{1}{2}\le t\le 1,\ x'\in X' \text{ のとき}\end{cases}$$

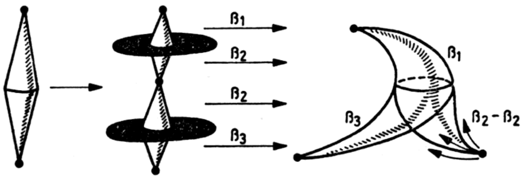


次の性質を確かめるのは読者に任せたい：

(v)　$\beta_1\simeq\beta_1'$ rel X かつ $\beta_2\simeq\beta_2'$ rel X ならば，

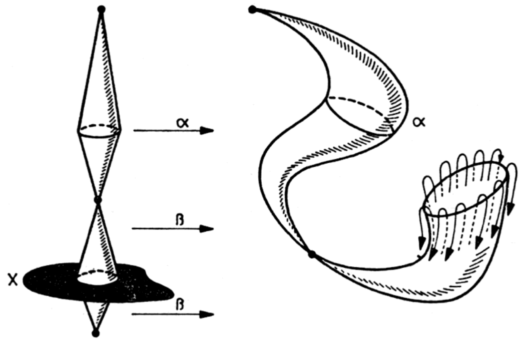
$$d(\beta_1, \beta_2)\simeq d(\beta_1', \beta_2')$$

(vi)　$d(\beta_1, \beta_2)+d(\beta_2, \beta_3)\simeq d(\beta_1, \beta_3)$.

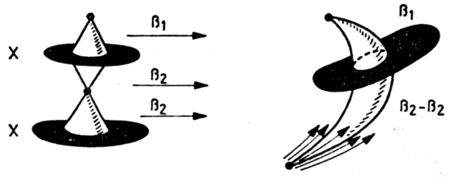


(助変数が 2 重に通過するとみなされ，図では仮に$\beta_2-\beta_2$ と表わされている錐は $\beta_2(f(X'))$ 上で可縮である.)

(vii)　$d(\alpha\oplus\beta, \beta)\simeq\alpha$.



(viii)　$\beta_1\simeq(d(\beta_1, \beta_2)\oplus\beta_2)$ rel X.



今，$d(\beta_1, \beta_2)\simeq *$ と仮定する. (viii) により $\beta_1\simeq(d(\beta_1, \beta_2)\oplus\beta_2)$ rel $X\simeq((*)\oplus\beta_2)$ rel $X\simeq\beta_2$ rel X，すなわち，$\beta_1\simeq\beta_2$ rel X である．逆に，$\beta_1\simeq\beta_2$ rel X ならば，(vii) からわかるように，$d(\beta_1, \beta_2)\simeq d(\beta_2, \beta_2)\simeq d((*)\oplus\beta_2, \beta_2)\simeq(*)$，すなわち，$d(\beta_1, \beta_2)\simeq(*)$ である．したがって，$\beta_1\simeq\beta_2$ rel X であるための必要十分

条件は，写像 $d(\beta_1, \beta_2)$ が零ホモトープとなることである．(i)～(iii) により次式で与えられる $[\Sigma X', Y]$ の集合 $[C_f, Y]_*$ への左からの作用が存在する：

$$[\alpha]\oplus[\beta]=[\alpha\oplus\beta],\ \text{ただし}\ [\alpha]\in[\Sigma X', Y]_*,\ [\beta]\in[C_f, Y]_*.$$

したがって，この「作用」に関する定理の定式化ができる．

定理 2　$[\beta_1], [\beta_2]\in[C_f, Y]_*$ とする．このとき，$i^*[\beta_1]=i^*[\beta_2]$ であるための必要十分条件は，$[\alpha]\in[\Sigma X', Y]_*$ が存在して $[\beta_1]=[\alpha]\oplus[\beta_2]$ を満たすことである．

証明　$[\beta_1]=[\alpha]\oplus[\beta_2]$ に対して，$i^*(\beta_1)=i^*(\alpha\oplus\beta_2)=(\alpha\oplus\beta)\,|\,X=\beta_2\,|\,X=i^*(\beta_2)$ である．逆に，$i^*[\beta_1]=i^*[\beta_2]$ とする．このとき，それぞれ $[\beta_1]$ と $[\beta_2]$ を表わす β_1 と β_2 が存在して $\beta_1|X=\beta_2|X$ を満たす．(viii) を考慮して，$[\beta_1]=[d(\beta_1, \beta_2)\oplus\beta_2]=[d(\beta_1, \beta_2)]\oplus[\beta_2]$ を得る．　　　　（証明終）

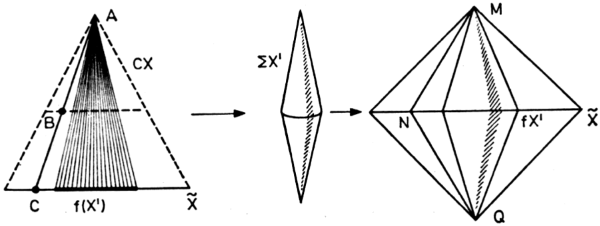
群 $[\Sigma X', Y]_*$ を調べよう．$[C_f, Y]_*$ は群ではないから，等式 $j^*[\alpha_1]=j^*[\alpha_2]$ は関係式 $[\alpha_2]=[\alpha_1]+(\Sigma f^*)[\gamma]$ を意味しないが，この関係式は正しい．すなわち，項 $[\Sigma X', Y]_*$ における完全性は左辺が群の場合と同様な意味をもつ．

定理 3　$[\alpha_1], [\alpha_2]\in[\Sigma X', Y]_*$ とする．このとき，$j^*[\alpha_1]=j^*[\alpha_2]$ であるための必要十分条件は，剰余類 $\gamma\in[\Sigma X, Y]_*$ が存在して $[\alpha_2]-[\alpha_1]=(\Sigma f)^*[\gamma]$ となることである．

証明　$[\alpha_2]=[\alpha_1]+(\Sigma f)^*[\gamma]$ と仮定する．α_0 と β_0 がそれぞれ定値写像 $\Sigma X'\to *\in Y, C_f\to *\in Y$ を表わすとき，$j^*[\alpha_0]=[\beta_0]$ であり，(iv) により

$$j^*[\alpha_1+(\Sigma f)^*\gamma]=[\alpha_1]\oplus(j^*(\Sigma f)^*[\gamma])$$

である．ただし，写像 $j^*(\Sigma f)^*\gamma=\gamma\circ(\Sigma f)\circ j$ は零ホモトープである．実際，これは C_f の上で定義され，したがって（写像 f は埋込み $X'\to\tilde{X}$，ただし $\tilde{X}$ は X にホモトピー同値な空間，で置き換えてよいから），これが CX からの写像に拡張されることを示さなければならない．

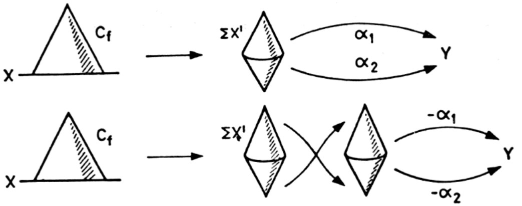


この拡張は，上図において AB を MN の上へ，BC を NQ の上へ写すことにより定義される．したがって

$$j^*[\alpha_1+(\Sigma f)^*\gamma]=[\alpha_1]\oplus[\beta_0]=[\alpha_1]\oplus j^*[\alpha_0]=j^*[\alpha_0+\alpha_1]=j^*[\alpha_1]$$

すなわち，$j^*[\alpha_2]=j^*[\alpha_1]$ である．

逆に，$j^*[\alpha_1]=j^*[\alpha_2]$ と仮定し，$[\alpha_2-\alpha_1]$ および $j^*[\alpha_2-\alpha_1]\ni(\alpha_2-\alpha_1)\circ j$ を考える．ただし，$(\alpha_2-\alpha_1)\circ j\simeq\alpha_1\oplus((-\alpha_2)\circ j)$ である．さて，図



で示されるように $(-\alpha_2)\circ j\simeq(-\alpha_1)\circ j$ である．したがって，

$$\alpha_1\oplus((-\alpha_2)\circ j)\simeq\alpha_1\oplus((-\alpha_1)\circ j)\simeq(\alpha_1-\alpha_1)\circ j\simeq\beta_0$$

すなわち，$j^*[\alpha_2-\alpha_1]=[\beta_0]$ であり，求められているように，$[\alpha_2-\alpha_1]=[\alpha_2]-[\alpha_1]=(\Sigma f)^*[\gamma]$ である．　（証明終）

注意 1　$Y=K(\pi,n)$ と選ぶならば，Puppe 完全系列は（部分的には）対 (X',X) のコホモロジー完全系列になる（ここで X' は $f:X\to X'$ が埋込みとなるようなホモトピー同値な空間で置き換えていると仮定する）：

$$H^n(X';\pi)\leftarrow H^n(X;\pi)\leftarrow H^n(C_f;\pi)\leftarrow H^{n-1}(X';\pi)\leftarrow H^{n-1}(X;\pi)\leftarrow\cdots$$

十分大きい N について，任意の写像 $\Sigma^N X\to K(\pi,n)$ は零ホモトープで，添字 $n-k$，ただし $k>n$，をもつ群は消え，この系列は右へ零が続く．f は埋込みなので，$H^n(C_f;\pi)\cong H^n(X'/X;\pi)\cong H^n(X',X;\pi)$ である．

演習　定理 1〜3 に用いられた構成の双対化を試みよ．このためには，次の完全性を証明しなければならない：

$$\cdots\to\Omega X\xrightarrow{\Omega f}\Omega X'\longrightarrow W_f\xrightarrow{\tau}X\xrightarrow{f}X'$$

ただし，$W_f=\{(x,s)\in X\times\mathrm{Map}_*(I,X')\mid s(1)=f(x),\ s(0)=*\in X'\}$ であり，f

は埋込みであると仮定していいので，$\tau(x,s)=s(1)=f(x)\in X$ である．写像 τ はファイバー $\Omega X'$ をもつファイバー空間である．

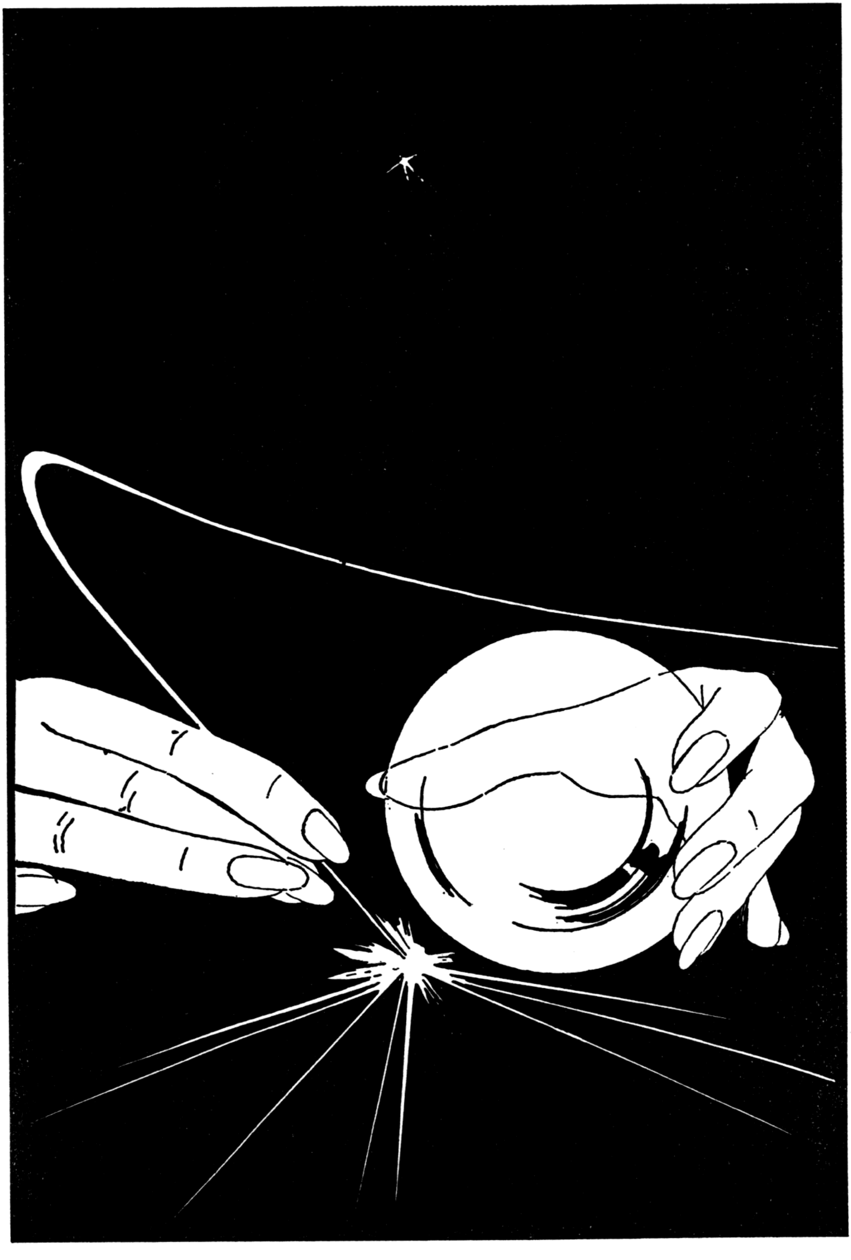
注意 2　$Y=S^m$ ならば，上の完全系列は対 (X', X) のホモトピー完全系列になる．実際 $\pi_{n+1}(X', X)\cong\pi_n(W_f)$ は明らか（単に W_f の絶対球写像は対 (X', X) の相対球写像と同じ）であるから，

$$\cdots\to[S^n, \Omega X]\to[S^n, \Omega X']\to[S^n, W_f]\to[S^n, X]\to[S^n, X']$$

すなわち

$$\cdots\to\pi_{n+1}(X)\to\pi_{n+1}(X')\to\pi_{n+1}(X', X)\to\pi_n(X)\to\pi_n(X')$$

は完全である．



第III章　スペクトル系列

§18. 空間のフィルター付けとそのスペクトル系列

X は部分空間 X_i の系列

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_k = X$$

をもつ位相空間とする．例えば，X が CW 複体ならば，$X_i = X^i$，X の i 切片，ととることができる．このような系列は X の(有限)**フィルター付け** (filtration) とよばれる．（通常は，この系列に項 $X_{-2} = X_{-3} = \cdots = \emptyset$ と $X_{k+1} = X_{k+2} = \cdots = X$ を付け加える.）

以下，**フィルター空間** (filtered space) のホモロジー群を調べよう．一般に，これからのホモロジー群についての議論は，少し修正することによりコホモロジー群についても展開することができる．

$C_q(X)$ は X の特異鎖とする．このとき明らかに

$$0 \subset C_q(X_0) \subset C_q(X_1) \subset \cdots \subset C_q(X_{k-1}) \subset C_q(X_k) = C_q(X)$$

が成り立つ．$\alpha \in C_q(X)$ は $\alpha \in C_q(X_i)$ かつ $\alpha \notin C_q(X_{i-1})$ のとき，**フィルター** i をもつという．したがって，$C_q(X_i)$ はフィルターが高々 i のすべての元から成り，他の元は含まない．要するに，このとき $C_q(X)$ に**フィルター付け**が与えられたという．今，

$$E^0_{i,q-i} = C_q(X_i, X_{i-1}) = C_q(X_i)/C_q(X_{i-1})$$

とおく．このとき整数 i と q はそれぞれ**フィルター次数**と**全次数**とよばれる．相対鎖に対して導入された境界作用素 $\partial_q : C_q(X_i, X_{i-1}) \to C_{q-1}(X_i, X_{i-1})$ を $d^0_{i,q-i}$ と表わす．すなわち，$d^0_{i,q-i} : E^0_{i,q-i} \to E^0_{i,q-i-1}$ である．このとき明らか

に，$d^0_{i,q-i-1}\circ d^0_{i,q-i}=0$ を満たす．このようにして，代数的複体が得られたことになる．このホモロジー群，すなわち群 $H_q(X_i, X_{i-1})$ を $E^1_{i,q-i}$ で表わす：

$$E^1_{i,q-i}=H_q(X_i, X_{i-1})$$

スペクトル系列とは，各項がある意味で前の項より小さい，すなわち，前の項のホモロジー群になっているように定義されたものである．以下，スペクトル系列を定義しよう．

定義（部分群 $Z^r_{i,q-i}\subset E^0_{i,q-i}$）$\alpha\in E^0_{i,q-i}=C_q(X_i)/C_q(X_{i-1})$ とする．類 α は，境界輪体 ∂a が a よりも r 小さいフィルターをもつ代表元 $a\in C_q(X_i)$ を含むとき，すなわち，$\partial a\in C_{q-1}(X_{i-r})$ となるとき，$\alpha\in Z^r_{i,q-i}$ と定義する．

$r=0$ の場合：$Z^0_{i,q-i}=E^0_{i,q-i}$.

$r=1$ の場合：$a\in\alpha$ が存在して $\partial a\in C_{q-1}(X_{i-1})$，すなわち，$\alpha$ は $C_q(X_i, X_{i-1})$ の輪体，すなわち

$$Z^1_{i,q-i}=Z_q(X_i, X_{i-1})$$

である．$\alpha\in Z_q(X_i, X_{i-1})$ は，各代表元 $a\in\alpha$ に対して性質 $\partial a\in C_{q-1}(X_{i-1})$ を意味することに注意しておく．しかし，すぐわかるように，$r>1$ のときは同じことは成立しない．

明らかに，r が増加するときこの群は減少し，十分大きい r について，$Z_q(X_i)/Z_q(X_{i-1})$ に収束する．（この安定群は $Z^\infty_{i,q-i}$ と表わされる．）このとき，包含系列：

$$Z^\infty_{i,q-i}\subset\cdots\subset Z^{r+1}_{i,q-i}\subset Z^r_{i,q-i}\subset\cdots\subset Z^0_{i,q-i}=E^0_{i,q-i}$$

を得る．

定義（部分群 $B^r_{i,q-i}\subset E^0_{i,q-i}$）元 $\alpha\in E^0_{i,q-i}$ を考える．類 α が $a=\partial b$，ただし $b\in C_{q+1}(X_{i+r-1})$，を満たす代表元 $a\in C_q(X_i)$ を含むとき，$\alpha\in B^r_{i,q-i}$ であると定義する．

$\alpha\in B^0_{i,q-i}$ は何を意味するのか？　これは類 $\alpha\in E^0_{i,q-i}=C_q(X_i, X_{i-1})$ が $a=\partial b$，ただし $b\in C_{q+1}(X_{i-1})$，を満たす代表元 $a\in C_q(X_i)$ を含むことを意味する．すなわち $a\in C_q(X_{i-1})$であり，よって $\alpha=0$ であるから，$B^0_{i,q-i}=0$ である．

$B^1_{i,q-i}$ は何であるのか？　$\alpha\in B^1_{i,q-i}$ ならば類 $\alpha\in E^0_{i,q-i}=C_q(X_i, X_{i-1})$ は，$a=\partial b$，ただし $b\in C_{q+1}(X_i)$，を満たす代表元 $a\in C_q(X_i)$ を含む．すなわち，$B^1_{i,q-i}$ は $C_q(X_i, X_{i-1})$ における相対境界輪体の部分群である：

$$B^1_{i,q-i}=B_q(X_i, X_{i-1})$$

明らかに，包含 $B^r_{i,q-i}\subset B^{r+1}_{i,q-i}$ がある．

r が増加すれば，群 $B^r_{i,q-i}$ は増加し，十分大きい r について，これは

$$B^\infty_{i,q-i}=B_q(X)\cap C_q(X_i)/B_q(X)\cap C_q(X_{i-1})$$

に等しい．

さて，次の包含系列がある：

$$0=B^0_{i,q-i}\subset B^1_{i,q-i}\subset\cdots\subset B^r_{i,q-i}\subset B^{r+1}_{i,q-i}\subset\cdots\subset B^\infty_{i,q-i}$$

ここで包含 $B^\infty_{i,q-i}\subset Z^\infty_{i,q-i}$ があるのは明らかである．したがって，次の包含系列を得る．

$$\begin{array}{l}0=B^0_{i,q-i}\subset \underset{\substack{\| \\ B_q(X_i,\,X_{i-1})}}{B^1_{i,q-i}}\subset\cdots\subset B^r_{i,q-i}\subset B^{r+1}_{i,q-i}\subset\cdots\subset B^\infty_{i,q-i}\\ \quad\subset Z^\infty_{i,q-i}\subset\cdots\subset Z^{r+1}_{i,q-i}\subset Z^r_{i,q-i}\subset\cdots\subset \underset{\substack{\| \\ Z_q(X_i,\,X_{i-1})}}{Z^1_{i,q-i}}\subset Z^0_{i,q-i}=\underset{\substack{\| \\ C_q(X_i,\,X_{i-1})}}{E^0_{i,q-i}}\end{array}\qquad(*)$$

商群 $E^r_{i,q-i}=Z^r_{i,q-i}/B^r_{i,q-i}$ $(r=0,1,\cdots,\infty)$ を考える．$r=0$ について，

$$E^0_{i,q-i}=Z^0_{i,q-i}/B^0_{i,q-i}=E^0_{i,q-i}/\{0\}=C_q(X_i,X_{i-1})$$

である．したがって，

$$E^0_{i,q-i}=C_q(X_i,X_{i-1}),$$

すなわち，$E^0_{i,q-i}$ はまさに上で定義した群であり，同じ記号で表わされる．

さらに

$$E^1_{i,q-i}=Z^1_{i,q-i}/B^1_{i,q-i}=Z_q(X_i,X_{i-1})/B_q(X_i,X_{i-1})=H_q(X_i,X_{i-1})$$

である．系列 (*) において，r が増加するにつれて群は減少する（分母は増加し，分子は減少する）．明らかに，ある自然数 r_0 が存在して，すべての i と q について

$$E^{r_0}_{i,q-i}=E^{r_0+1}_{i,q-i}=\cdots=E^\infty_{i,q-i}$$

となる．

定義（微分 $d^r_{i,q-i}:E^r_{i,q-i}\to E^r_{i-r,q+r-i-1}$）$\alpha\in E^r_{i,q-i}=Z^r_{i,q-i}/B^r_{i,q-i}$ とし，$\alpha'\in Z^r_{i,q-i}$ は α の代表元とする．$a\in C_q(X_i)$ は $\alpha'\in Z^r_{i,q-i}\subset C_q(X_i)/C_q(X_{i-1})$ を表わし，$b=\partial a$ は高々 $i-r$ のフィルターをもつと仮定する．このとき，群 $C_{q-1}(X_{i-r})/C_{q-1}(X_{i-r-1})$ における b の類 β' は $Z^r_{i-r,q+r-i-1}$ に属し，$E^r_{i-r,q+r-i-1}$ において α のみに依存する元を定義する．この元を $d^r_{i,q-i}\alpha$ と表わす．この定義が矛盾のないことを検討し，$d^r_{i,q-i}:E^r_{i,q-i}\to E^r_{i-r,q+r-i-1}$ が準同型であるこ

と，等式 $d^r_{i-r,q+r-i-1}\circ d^r_{i,q-i}=0$ が成り立つことを証明するのは読者に任せる．

注意　準同型 $d^1_{i,q-i}:E^1_{i,q-i}\to E^1_{i+1,q-i}$ は3対 (X_i, X_{i-1}, X_{i-2}) の完全系列の境界準同型 $\partial: H_q(X_i, X_{i-1})\to H_{q-1}(X_{i-1}, X_{i-2})$ と一致する．（これらの準同型の定義は逐語的に同じである．）

E^r を $E^r=\bigoplus_{i,q} E^r_{i,q-i}$ とおいて定義する．このとき，微分 $d^r_{i,q-i}$ は微分 $d^r: E^r\to E^r$ を誘導し，$d^r\circ d^r=0$ を満たす．

群 E^r と微分 d^r の系列 $\{E^r, d^r\}$ は**スペクトル系列**とよばれる．

定理　E^{r+1} は微分 d^r に関する E^r のホモロジー群である．すなわち，$E^{r+1}=\mathrm{Ker}\, d^r/\mathrm{Im}\, d^r$，もっと正確には，$E^{r+1}_{i,q-i}=\mathrm{Ker}\, d^r_{i,q-i}/\mathrm{Im}\, d^r_{i+r,q-i-r+1}$ である．

証明（定義と同じ記号を用いる．）$d^r_{i,q-i}(\alpha)=0$ と仮定する．このとき，上と同じ記号の下で β' は $B^r_{i-r,q-i+r-1}$ に属する．すなわち，代表元 $c\in\beta'$ が存在して，$c=\partial\tau$, $\tau\in C_q(X_{i-1})$ となる．

元 a は α' の代表元で，$a\in C_q(X_i)$ である．$a-\tau\in C_q(X_i)$ を考える．包含 $C_q(X_{i-1})\subset C_q(X_i)$ があることを思いおこそう．τ を引いても $C_q(X_i)/C_q(X_{i-1})$ における類は変わらない．すなわち，$a-\tau$ は同じ類 $\alpha'\in Z^r_{i,q-i}$ の代表元である．微分 $d^r_{i,q-i}$ は矛盾なく定義されている(すなわち，代表元の選び方に依存しない)から，$a-\tau$ を a の代わりに最初から選んでおくことができる．したがって，$\partial(a-\tau)\in C_{q-1}(X_{i-r-1})$ かつ $\alpha'\in Z^{r+1}_{i,q-i}$ である．$E^{r+1}_{i,q-i}$ における α' の剰余類を $\bar{\alpha}$ と書く．このとき α に $\bar{\alpha}$ を対応させて，準同型 $\mathrm{Ker}\, d^r_{i,q-i}\to E^{r+1}_{i,q-i}$ を得る．さて，次を証明することが残っている：

(1) この準同型は矛盾なく定義されている，すなわち，$\bar{\alpha}$ は α のみに依存している．

(2) この準同型は全射である．

(3) この準同型の核は群 $\mathrm{Im}\, d^r_{i+r,q-i-r+1}$ である．

これらの証明は読者に任せる．

さて「安定」群 $E^\infty_{i,q-i}$ を考える．定義により $E^\infty_{i,q-i}=Z^\infty_{i,q-i}/B^\infty_{i,q-i}$ である．

包含 $X_i\subset X$ により誘導される準同型 $H_q(X_i)\to H_q(X)$ の像を ${}_{(i)}H_q(X)$ と表わすと，次のフィルター付けが得られる：

$$0={}_{(-1)}H_q(X)\subset{}_{(0)}H_q(X)\subset\cdots\subset{}_{(k)}H_q(X)=H_q(X)$$

定理　$E^\infty_{i,q-i}\cong{}_{(i)}H_q(X)/{}_{(i-1)}H_q(X)$

証明　定義により

$Z^{\infty}_{i,q-i}=Z_q(X_i)/Z_q(X_{i-1})$,

$B^{\infty}_{i,q-i}=B_q(X)\cap C_q(X_i)/B_q(X)\cap C_q(X_{i-1})$,

${}_{(i)}H_q(X)=Z_q(X_i)/B_q(X)\cap C_q(X_i)$,

${}_{(i-1)}H_q(X)=Z_q(X_{i-1})/B_q(X)\cap C_q(X_{i-1})$.

証明すべき同型

$$Z^{\infty}_{i,q-i}/B^{\infty}_{i,q-i}\cong{}_{(i)}H_q(X)/{}_{(i-1)}H_q(X)$$

は次のよく知られた代数的命題から直ちにわかる：

AとBがある群の部分群ならば，$(A+B)/B\cong A/(A\cap B)$である．

さて，結果を要約しよう．

定理　空間Xが部分空間X_iによりフィルター付けられている（すなわち，$\varnothing=X_{-1}\subset X_0\subset\cdots\subset X_{k-1}\subset X_k=X$）ならば，$r\geq 0$と各$p$と$q$に対して群$E^r_{p,q}$（ただし，$p<0$, $p>k$について$E^r_{p,q}=0$）と準同型$d^r_{p,q}: E^r_{p,q}\to E^r_{p-r,q+r-1}$（ただし，$d^r_{p-r,q+r-1}\circ d^r_{p,q}=0$）が存在して次を満たす：

(1) $E^{r+1}_{p,q}=\mathrm{Ker}\,d^r_{p,q}/\mathrm{Im}\,d^r_{p+r,q-r+1}$,

(2) $E^0_{p,q}=C_{p+q}(X_p, X_{p-1})$,

(3) $E^{\infty}_{p,q}\cong\dfrac{\mathrm{Im}\,(H_{p+q}(X_p)\to H_{p+q}(X))}{\mathrm{Im}\,(H_{p+q}(X_{p-1})\to H_{p+q}(X))}=\dfrac{{}_{(p)}H_{p+q}(X)}{{}_{(p-1)}H_{p+q}(X)}$.

これが **Leray の定理**である．

命題(3)を説明しよう．これは，各mについて群$H_m(X)$は部分群${}_{(0)}H_m(X)=E^{\infty}_{0,m}$を含むこと，商群$H_m(X)/E^{\infty}_{0,m}$は部分群$E^{\infty}_{1,m-1}$を含むこと，最後に，商群

$$(\cdots((H_m(X)/E^{\infty}_{0,m})/E^{\infty}_{1,m-1})/E^{\infty}_{2,m-2}\cdots)/E^{\infty}_{k-1,m-k+1}$$

は$E^{\infty}_{k,m-k}$に等しいことを言っている．したがって，群$\oplus_{p+q=m}E^{\infty}_{p,q}$は$H_m(X)$に密接に関係している．この群はフィルター${}_{(i)}H_m(X)$に関して$H_m(X)$に**同伴である**といわれ，時には$\mathscr{G}H_m(X)$と表わされる．

同伴群のいくつかの形式的な性質に注意しよう．Aは可換群，$0\subset A_0\subset A_1\subset\cdots\subset A_m=A$はフィルター付け，$\mathscr{G}A=\oplus_i A^0_i$，ただし$A^0_i=A_i/A_{i-1}$は同伴群とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\mathscr{G}A$が有限生成ならば，Aも有限生成で，それらの階数は等しい．

(2) $\mathscr{G}A$が有限群ならば，Aも有限群で，それらの位数は等しい．

(3) 唯1つのA^0_iを除いてすべてが零群ならば，$\mathscr{G}A=A$である．

(4) 2つの $A^0_{i_1}$ と $A^0_{i_2}$ (ただし $i_1<i_2$) を除いてすべてが零ならば，$A^0_{i_1}\subset A$ かつ $A/A^0_{i_1}=A^0_{i_2}$ である．

(5) すべての A^0_i が自由可換群ならば，$\mathscr{G}A$ は A に同型である．

(6) すべての A^0_i がある体 k 上のベクトル空間ならば，$\mathscr{G}A$ は A に同型である．

証明は読者に任せる．

ホモロジーの代わりにコホモロジーを用いて，同様な理論を構成できる．最終的な結果は次の通りである．

定理　空間 X が部分空間 X_i でフィルター付けられている (すなわち，$\emptyset=X_{-1}\subset X_0\subset\cdots\subset X_{k-1}\subset X_k=X$) ならば，$r\geq 0$ と各 p と q に対して定義された群 $E_r^{p,q}$ (ただし，$p<0$ と $p>k$ について $E_r^{p,q}=0$) と準同型 $d_r^{p,q}: E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$ (ただし，$d_r^{p+r,q-r+1}\circ d_r^{p,q}=0$) が存在して次を満たす：

(1) $E_{r+1}^{p,q}=\mathrm{Ker}\, d_r^{p,q}/\mathrm{Im}\, d_r^{p-r,q+r-1}$,

(2) $E_0^{p,q}=C^{p+q}(X_p, X_{p-1})$,

(3) $E_\infty^{p,q}\cong\dfrac{\mathrm{Ker}\,(H^{p+q}(X)\to H^{p+q}(X_{p-1}))}{\mathrm{Ker}\,(H^{p+q}(X)\to H^{p+q}(X_p))}=\dfrac{{}^{(p-1)}H^{p+q}(X)}{{}^{(p)}H^{p+q}(X)}$.

すなわち，$\bigoplus_{p+q=m}E_\infty^{p,q}$ は次のフィルター付けに関して $H^m(X)$ に同伴である：

$$0={}^{(k)}H^m(X)\subset\cdots\subset{}^{(0)}H^m(X)\subset{}^{(-1)}H^m(X)=H^m(X)$$

ただし，${}^{(i)}H^m(X)$ は包含 $X_i\subset X$ により誘導された写像 $H^m(X)\to H^m(X_i)$ の核を表わす．

すでに述べたように，証明はホモロジーの定理の場合と同様である．すなわち，群 $C^q(X)$ にフィルター付け

$$0={}^{(k)}C^q(X)\subset\cdots\subset{}^{(0)}C^q(X)\subset{}^{(-1)}C^q(X)=C^q(X)$$

を導入し，${}^{(i)}C^q(X)$ は，$c\in C_q(X_i)\subset C_q(X)$ のときはいつでも $\gamma(c)=0$ となるような双対鎖 $\gamma: C_q(X)\to \boldsymbol{Z}$ から成るものとする．さらに，

$$E_0^{i,q-i}=C^q(X_i, X_{i-1})={}^{(i-1)}C^q(X)/{}^{(i)}C^q(X)$$

と定義し，境界作用素 ∂ はすべて双対境界作用素 δ で置き換える．

注意　係数が任意の群であるもっと一般の場合に，ホモロジーとコホモロジーの両者に対する類似の定理を証明することができる．

第1の例：CW 複体のホモロジー群の計算の新しい解釈

X は CW 複体とし，その切片 $X_k=X^k$ によりフィルター付けられていると

する．このとき，$E^0_{p,q}=\mathscr{C}_{p+q}(X^p, X^{p-1})$ であり，

$$E^1_{p,q}=H_{p+q}(X^p, X^{p-1})=\begin{cases}0 & q\neq 0 \text{ のとき} \\ \mathscr{C}_p(X) & q=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

$$d^1_{p,q}: E^1_{p,q}\to E^1_{p-1,q}$$

すなわち，$d^1_{p,q}$ は，$q\neq 0$ のとき零群から，$q=0$ のとき $\mathscr{C}_p(X)$ から $\mathscr{C}_{p-1}(X)$ への準同型である．

微分の定義の次にある注意によれば，最後の準同型は3対 (X^p, X^{p-1}, X^{p-2}) の完全系列の境界準同型 $H_p(X^p, X^{p-1})\to H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$，すなわち，境界作用素 $\partial: \mathscr{C}_p(X)\to\mathscr{C}_{p-1}(X)$ と一致する．ここで $q\neq 0$ のとき $E^2_{p,q}=0$ であり，$E^2_{p,0}=H_p(X)$ が成り立つ．さらに，$d^2_{p,q}: E^2_{p,q}\to E^2_{p-2,q+1}$ である．ただし $E^2_{p,q}$ または $E^2_{p-2,q+1}$ のいずれかは零に等しいから $d^2_{p,q}=0$ かつ $E^3_{p,q}=E^2_{p,q}$ である．同様な方法で $E^3=E^4=\cdots=E^\infty$ を得る．$p+q=n$ の線上には零と異なる群が2つ以上はない：$E^\infty_{n,0}=E^2_{n,0}$．したがって，同伴性の性質(3)により $E^\infty_{n,0}=H_n(X)$ である．

定義　スペクトル系列は各 $r\geq 2$ について微分 d^r が零に等しいとき，すなわち，$E^2=E^3=E^4=\cdots=E^\infty$ のとき，**自明である**といわれる．

このように，切片によりフィルター付けられたCW複体の任意の可換係数群上で考えたスペクトル系列は自明である．

第2の例：対のホモロジー系列の新しい解釈

2項のフィルター付け：$\emptyset\subset Y\subset X$，ただし $X_0=Y$, $X_1=X$，を考える．さて，$p=0,1$ に対して

$$E^0_{p,q}=C_{p+q}(X_p, X_{p-1})$$

$$E^1_{p,q}=H_{p+q}(X_p, X_{p-1})=\begin{cases}H_q(Y) & p=0 \text{ のとき} \\ H_{q+1}(X, Y) & p=1 \text{ のとき}\end{cases}$$

である．群 $E^1_{p,q}$ の中で，$E^1_{0,q}$ と $E^1_{1,q}$ のみが零と異なる．したがって，微分については，零と異なる唯1つのものは $d^1_{1,q}: E^1_{1,q}\to E^1_{0,q}$ であることがわかる．$p\neq 1$ については次元を考慮して微分 $d^1_{p,q}$ は自明である．（以下，「次元を考慮して」というのは「群 $E^r_{p,q}$ と微分 $d^r_{p,q}$ の添字 p, q, r を考慮して」を意味する．）

準同型 $d^1_{1,q}: E^1_{1,q}\to E^1_{0,q}$ は，対 (X, Y) の完全系列における境界準同型 ∂：

$H_{q+1}(X, Y)\to H_q(Y)$ と一致するから，$E^2_{1,q}=\mathrm{Ker}\,\partial$ と $E^2_{0,q}=H_q(Y)/\mathrm{Im}\,\partial$ であり，残りの p, q については，$E^2_{p,q}=0$ である．したがって，次元を考慮して，すべて微分 d_r, $r\geq 2$, は自明，すなわち，$E^2_{p,q}=E^\infty_{p,q}$ である．特に，$E^2_{1,q}=E^\infty_{1,q}$ かつ $E^2_{0,q}=E^\infty_{0,q}$ である．

さて，E^∞ 項は $H_*(X)$ およびフィルター付け $0\subset\mathrm{Im}\,H_q(Y)\subset H_q(X)$ に次の意味で同伴していることがわかっている：

$$E^\infty_{0,q}=\mathrm{Im}\,H_q(X_0)/\mathrm{Im}\,H_q(X_{-1})=\mathrm{Im}\,H_q(Y),$$
$$E^\infty_{1,q}=\mathrm{Im}\,H_{q+1}(X_1)/\mathrm{Im}\,H_{q+1}(X_0)=H_{q+1}(X)/\mathrm{Im}\,H_{q+1}(Y)$$

すなわち，

$$\mathrm{Ker}\,\partial=H_{q+1}(X)/\mathrm{Im}\,H_{q+1}(Y),\quad H_q(Y)/\mathrm{Im}\,\partial=\mathrm{Im}\,H_q(Y)$$

である．次に，対 (X, Y) のホモロジー完全系列

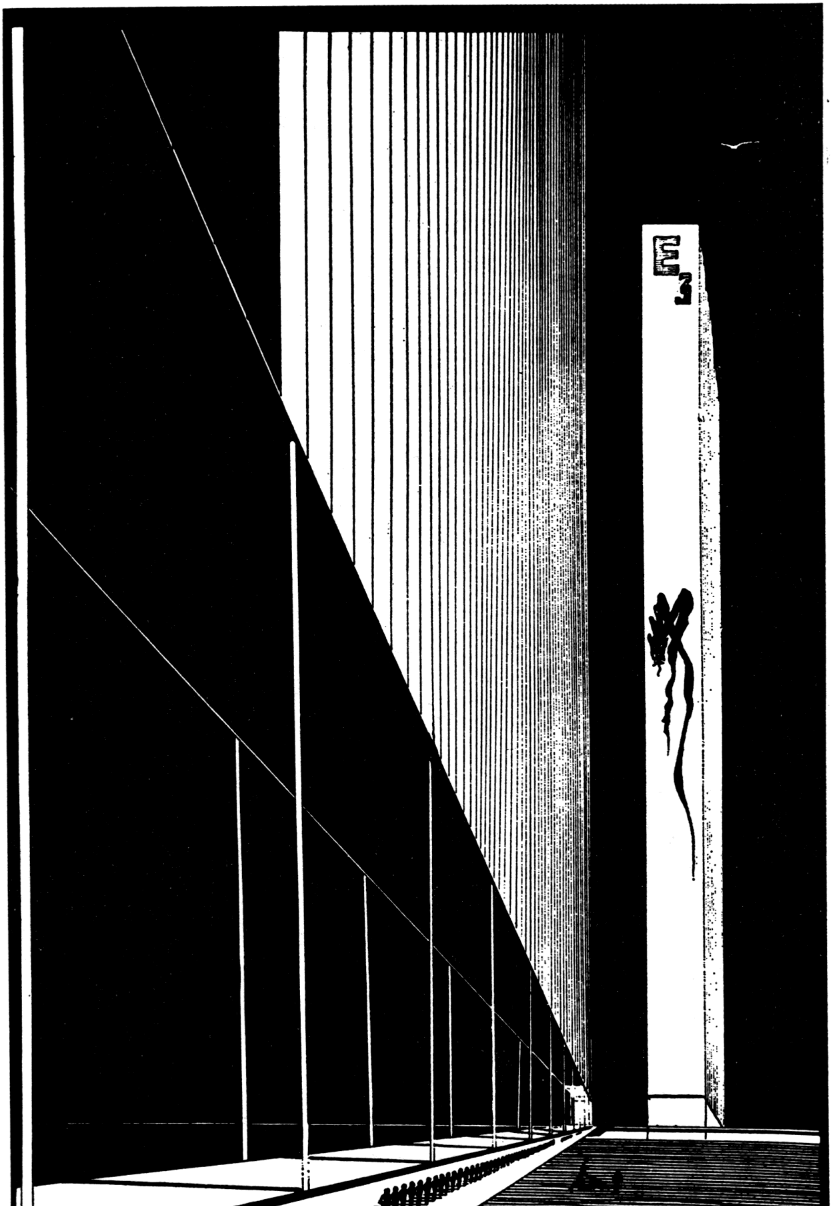
$$\cdots\to H_q(X, Y)\xrightarrow{\partial} H_{q-1}(Y)\to H_{q-1}(X)\to H_{q-1}(X, Y)\to\cdots$$

を考える．明らかに，この系列は上の2つの等式に同値である．したがって，2項のフィルター付けのスペクトル系列は対の完全系列に同値であると結論できる．

演習　3項のフィルター付けのスペクトル系列を計算し，これは3項の完全系列に同値であることを証明せよ．

これまでは有限のフィルター付けを考えた．この構成は無限のフィルター付け $\emptyset=X_{-1}\subset X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_\infty=X$ にも行なうことができる．最初の難点は，群 $E^\infty_{p,q}$ の定義にある．実際，群 $E^N_{p,q}$ は N が大きくなるとき必ずしも安定化しない．コホモロジーの場合は，$r>p$ について群 $E^{p,q}_{r+1}$ は微分 $d^{p,q}_r$ の核に同型である ($\mathrm{Im}\,d^{p-r,q+r-1}_r=0$ は次元を考慮してわかる)．したがって，$E^{p,q}_{p+1}\supset E^{p,q}_{p+2}\supset\cdots$ であり，$E^{p,q}_\infty=\bigcap_{i>0}E^{p,q}_{p+i}$ とおくことができる．ホモロジーの場合は同様に，$r>0$ について，$E^{r+1}_{p,q}$ は商群 $E^r_{p,q}/\mathrm{Im}\,d^r_{p+r,q-r+1}$ に同型で，$E^\infty_{p,q}$ は系列 $E^{p+1}_{p,q}\to E^{p+2}_{p,q}\to\cdots$ の極限として定義される．

この場合，Leray の定理の命題 (3) は何ら修正をせずに成り立つ．しかし，フィルター ${}_{(i)}H_m(X)$ は無限であり，等式 $\bigcup_{i=0}^\infty {}_{(i)}H_m(X)=H_m(X)$ を示すには特別な証明が必要である．この等式は，フィルター付け $X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_\infty=X$ が，付加条件「任意のコンパクト集合 $K\subset X$ に対して，有限の添字 k が存在して $K\subset X_k$ となる」を満たすとき正しい．(CW 複体の切片によるフィルター



付けは自動的にこの条件を満たす.)

同じ条件の下に，コホモロジー群で定義されたフィルター ${}^{(i)}H^m(X)$ は $\bigcap_{i=0}^{\infty} {}^{(i)}H^m(X)=0$ という性質をもつ.

証明は読者に任せる.

§19. ファイバー空間のスペクトル系列

$p: E \to B$ は，B が連結な CW 複体である Serre ファイバー空間とする．(B が連結な CW 複体であるというこの仮定は実際は必要でない．というのは，以下にも述べる通り，この構成は任意の位相空間に行なうことができるからである．実際，任意の位相空間 X に対して CW 複体 X' と写像 $f: X' \to X$ が存在して，f はホモトピー群の間の同型を誘導する．したがって，任意に与えられた底空間 B は CW 複体 B' と写像 $f: B' \to B$ により置き換えることができる．これから同様に，ファイバー空間 $p: E \to B$ は f により誘導されるファイバー空間 $p': E' \to B'$ により置き換えられる.)

次の目的は，B と F のホモロジー群とコホモロジー群がわかっていると仮定して，全空間 E のホモロジー群とコホモロジー群を求めることである.

B^α は B の α 切片を表わすとする．B を切片によりフィルター付けする：

$$\emptyset \subset B^{-1} \subset B^0 \subset B^1 \subset \cdots \subset B^{n-1} \subset B^n = B.$$

射影 p は E のフィルター付け

$$\emptyset = E^{-1} \subset E^0 \subset E^1 \subset \cdots \subset E^{n-1} \subset E^n = E$$

を誘導する．ただし，$E^i = p^{-1}(B^i)$. このフィルター付けで構成される E のスペクトル系列を考える．以下でわかるように，このスペクトル系列の E_2 項は底空間 B とファイバー F のホモロジー群で表現される．すなわち，スペクトル系列は，完全にではないが，むしろ厳密に B と F の性質により定められる.

以下，ホモロジーの場合を考える．(コホモロジーの場合もまったく同様に扱うことができる.) 定義により，

$$E^0_{p,q} = C_{p+q}(E^p, E^{p-1})$$

であり，したがって，

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(E^p, E^{p-1}) = H_{p+q}(E^p/E^{p-1})$$

である．次に (CW 複体 B の胞体鎖を考えて),



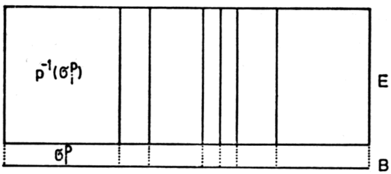
$$H_{p+q}(E^p/E^{p-1})\cong\mathscr{C}_p(B\,;\,H_q(F))$$

を示そう．

E^p/E^{p-1} を解説することから始めよう．差 $E^p\backslash E^{p-1}$ は原像 $p^{-1}(\sigma_i^p)$ から成る．ただし σ_i^p は B の p 次元胞体である．これらの集合は E^p の開集合で，互いに素である．したがって，

$$E^p/E^{p-1}=\bigvee_i E^p/(E^p\backslash p^{-1}(\sigma_i^p))=\bigvee_i \overline{p^{-1}(\sigma_i^p)}/p^{-1}(\partial\sigma_i^p)$$
$$=\bigvee_i p^{-1}(\bar{\sigma}_i^p)/p^{-1}(\partial\sigma_i^p)$$

ただし，$\partial\sigma_i^p=\bar{\sigma}_i^p\backslash\sigma_i^p$ である．



簡単のために，ファイバー空間は局所自明であると仮定する．一般の Serre ファイバー空間の場合に命題を証明するのは読者に任せる．まず，

$$p^{-1}(\bar{\sigma}_i^p)/p^{-1}(\partial\sigma_i^p)\approx D^p\times F/S^{p-1}\times F$$

を示そう．$f:D^p\to B$ は胞体 σ_i^p の特性写像とする．f により $p:E\to B$ から誘導されるファイバー空間 $\bar{E}\to D^p$ は，D^p 上の任意のファイバー空間と同様，自明 $\bar{E}\approx D^p\times F$ である．

$$\begin{array}{ccccccc}\partial\bar{E} & \subset & \bar{E} & \to & p^{-1}(\bar{\sigma}_i^p) & \subset & E\\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p\\ S^{p-1} & \subset & D^p & \to & \bar{\sigma}_i^p & \subset & B\end{array}$$

f の像は $\bar{\sigma}_i^p$ であるから，この写像は $D^p\to\bar{\sigma}_i^p\subset B$ と分解でき，したがって，対応する写像 $\bar{E}\to E$ の分解 $\bar{E}\to p^{-1}(\bar{\sigma}_i^p)\subset E$ を与える．写像 $\bar{E}\to p^{-1}(\bar{\sigma}_i^p)$ は $\bar{E}\backslash\partial\bar{E}$ を $p^{-1}(\sigma_i^p)$ の上へ同相に，$\partial\bar{E}$ を $p^{-1}(\partial\sigma_i^p)$ の上へ写す．（後者の制限写像は同相ではない．）したがって，

$$p^{-1}(\bar{\sigma}_i^p)/p^{-1}(\partial\sigma_i^p)=\bar{E}/\partial\bar{E}=D^p\times F/S^{p-1}\times F$$

である．さて，命題の証明に移ろう．まず，定義により

$$\mathscr{C}_p(B\,;\,H_q(F))\cong H_p(B^p,B^{p-1}\,;\,H_q(F))$$
$$\cong\bigoplus H_p(\bar{\sigma}_i^p,\partial\sigma_i^p\,;\,H_q(F))$$

$$\cong \bigoplus H_p(\bar{\sigma}_i^p/\partial\sigma_i^p\,;H_q(F)) \cong \bigoplus H_q(F),$$

$$H_{p+q}(E^p/E^{p-1}) \cong H_{p+q}(\bigvee_i p^{-1}(\bar{\sigma}_i^p)/p^{-1}(\partial\sigma_i^p))$$

$$\cong \bigoplus H_{p+q}(p^{-1}(\bar{\sigma}^p)/p^{-1}(\partial\sigma^p))$$

$$\cong \bigoplus H_{p+q}(D^p \times F/S^{p-1} \times F)$$

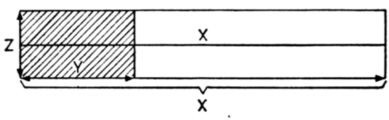
である．ただし，直和はすべての i 胞体にわたる．次に同型

$$H_{p+q}(D^p \times F/S^{p-1} \times F) \cong H_q(F)$$

を示そう．そうすれば，$H_{p+q}(E^p/E^{p-1}) \cong \bigoplus H_q(F)$，すなわち，$H_{p+q}(E^p/E^{p-1}) \cong \mathscr{C}_p(B\,;H_q(F))$ がわかる．容易にわかるように，X と ΣX のコホモロジー群は，次元が1ずれることを除けば一致する．すなわち，$q>0$ について $H_q(X) \cong H_{q+1}(\Sigma X)$，したがって，$H_{q+p}(\Sigma^p X) \cong H_q(X)$ である．(もし $D^p \times F/S^{p-1} \times F$ が F の (p 次) 懸垂であるならば，命題が証明されてしまうのだが，そううまくはいってない．実際，以下に示されるように，懸垂 Σ^p はさらに分解

$$\Sigma^p F = (D^p \times F/S^{p-1} \times F)/S^p$$

を付け加えて，考えている空間から得ることができる．ただし，$S^p \subset D^p \times F/S^{p-1} \times F$ は $D^p \subset D^p \times F$ から $S^{p-1} \subset D^p$ の点を張り合わせて得られた球面である．) 上の等式を証明する．X と Z は任意の空間とし，$Y \subset X$ とする．次の図



で容易にわかるように，

$$X \times Z/(Y \times Z) \cup X = (X/Y) \times Z/Z \vee (X/Y)$$

である．われわれの場合，$X = D^p$, $Y = S^{p-1}$, $Z = F$，すなわち，

$$(D^p \times F/S^{p-1} \times F)/S^p = S^p \times F/F \vee S^p$$

である．空間 $S^p \times F/S^p \vee F$ を考える．この空間は S^p と F の**スマッシュ積**とよばれ，$S^p \wedge F$ と表わされる．

定義　2つの任意の空間 X と Y の**スマッシュ積**も $X \wedge Y = X \times Y/X \vee Y$ と同様に定義する．

$S^p \wedge F = \Sigma^p F$ を証明しよう．第1に，スマッシュ積は結合的

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

である（これを確かめることは読者に任せる）．第2に，容易にわかるように，$S^1\wedge F=\Sigma F$ かつ $S^p=\underbrace{S^1\wedge\cdots\wedge S^1}_{p}$，すなわち，$S^p\wedge F=(\underbrace{S^1\wedge\cdots\wedge S^1}_{p-1})\wedge\Sigma F=\cdots=\Sigma^pF$. よって，

$$(D^p\times F/S^{p-1}\times F)/S^p=\Sigma^pF$$

である．したがって，$q>0$ については明らかに（対の完全系列から）$H_{p+q}(D^p\times F/S^{p-1}\times F)\cong H_{p+q}(D^p\times F/S^{p-1}\times F, S^p)\cong H_{p+q}(\Sigma^pF)\cong H_q(F)$ であり，これが求める命題であった．$q=0$ の場合は読者に任せる．

F が CW 複体の場合は，同型 $H_{p+q}(D^p\times F, S^{p-1}\times F)\cong H_q(F)$ を次のようなもっと簡単な方法で確かめることができる．複体 $D^p\times F$ は，3つの胞体をもつ複体としての D^p の構成に応じて，3種類の胞体をもつ．このうち2つは $S^{p-1}\times F$ に属し，したがって，コホモロジーを考えるときは無視してよい．残りの胞体は，次元が p 大きいだけで，F に属する胞体と一対一に対応する．

以上証明した事実により，部分空間 E^p によりフィルター付けられた空間 E のスペクトル系列の第1項を定めることができる：

$$E^1_{p,q}\cong\mathscr{C}_p(B\,;H_q(F)).$$

この同型にはもっと注意を払う価値がある．$\sum\alpha_i\sigma_i^p$ は群 $\mathscr{C}_p(B\,;H_q(F))$ の元とする，ただし $\alpha_i\in H_q(F)$. この元に対応する $E^1_{p,q}\cong\bigoplus_iH_{p+q}(p^{-1}(\bar\sigma_i^p)/p^{-1}(\partial\sigma_i^p))$ の元は，各 i について固定された標準的な空間 $D^p\times F/S^{p-1}\times F$ から $p^{-1}(\bar\sigma_i^p)/p^{-1}(\partial\sigma_i^p)$ の上への同じ同相写像を用いて構成される．この同相写像はホモトピーの意味でも一意的でないので，用いたものを承知しておくことは重要であるが，明らかに，球体 D^p の中心の上にある部分空間 $F\subset D^p\times F/S^{p-1}\times F$ から胞体 σ_i^p の中心 x_0 上のファイバー $F_{x_0}\subset p^{-1}(\bar\sigma_i^p)/p^{-1}(\partial\sigma_i^p)$ への同相写像を固定すれば十分である．これらの同相写像を固定すると，同型

$$E^1_{p,q}\cong\mathscr{C}_p(B\,;H_q(F))$$

は定まる．この同相 $F\approx F_{x_0}$ をある意味で各胞体に対して（ホモトピーを除いて）普遍的に選ぶことは可能であろうか？　底空間の2点 x_1 と x_2 を結ぶ任意の道は同相写像 $F_{x_1}\approx F_{x_2}$ を（ホモトピーを除いて）誘導し，一方，ホモトープな道は同じ同相写像を誘導する．B が単連結ならば，この同相写像のホモトピー類は特別な道にまったく無関係である．したがって，ある点 x_0 に対して $F\to F_{x_0}$ を固定し，すべての $x\in B$ に対して（再びホモトピーを除いて）標準的に同相写

像 $F \approx F_x$ を定義する．この操作は矛盾なく定義された同型 $E^1_{p,q} \cong \mathscr{C}_p(B\,;H_q(F))$ を与える．底空間が単連結でなくても，ファイバー空間が**単純**（$\Longleftrightarrow$ 与えられた任意の元の組 $x_1, x_2 \in B$ に対して，これらの点を結ぶすべての道がホモトープな同相 $F_{x_1} \approx F_{x_2}$ を誘導する）ならば，同じことは構成できる．

以下，単純なファイバー空間のみを考察し，一般な場合は基本的な定式化に限ることにする．

さて，単連結な底空間をもつファイバー空間（あるいは単純なファイバー空間）を考える．このとき，次が成り立つ：

$$d^1_{p,q} : E^1_{p,q} \cong \mathscr{C}_p(B\,;H_q(F)) \to E^1_{p-1,q} \cong \mathscr{C}_{p-1}(B\,;H_q(F))$$

この準同型が次の境界作用素

$$\partial : \mathscr{C}_p(B\,;H_q(F)) \to \mathscr{C}_{p-1}(B\,;H_q(F)),$$

と同一であることは容易に確かめることができる．したがって，

$$E^2_{p,q} \cong H_p(B\,;H_q(F))$$

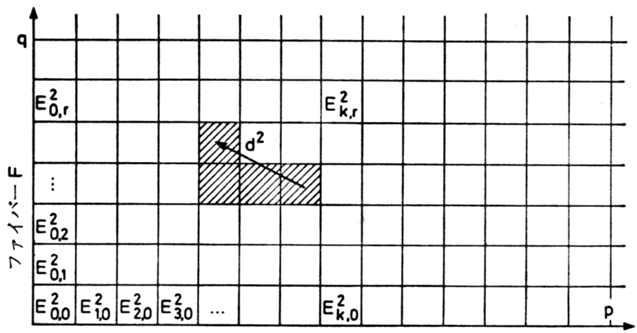
である．

注意　普遍係数公式からわかるように，係数群 K が体ならば，

$$E^2_{p,q} \cong H_p(B\,;K) \otimes H_q(F\,;K)$$

である．同じことは，$H_*(B)$ または $H_*(F)$ のいずれかが torsion をもたないという条件の下で整係数ホモロジーについても成り立つ．

項 $E^2 = \oplus_{p,q} E^2_{p,q}$ の図解には非常に便利な図式があり，これはしばしば役立つことがわかる．次の図で矢印は微分 $d^2_{m,n}$ の作用（桂馬の進み方）を示す．



底空間 B

r が大きくなるにつれて，微分 $d^r_{m,n}$ の作用を示す矢印は，$p+q=$一定 の直線

の方向と一致するように大きくなる．底辺の行は群 $E^2_{p,0}=H_p(B\,;H_0(F))$，すなわち，(ファイバーが連結ならば)底空間のホモロジー群を含む．左の最初の列は(底空間が連結ならば)ファイバーのホモロジーを含む．E^∞ 項に対するこの図式において，$p+q=m$ の線上は和が $H_m(E)$ に同伴する群から成る．

フィルター付け

$$\emptyset=E^{-1}\subset E^0\subset\cdots\subset E^{n-1}\subset E^n=E$$

のコホモロジー・スペクトル系列の場合も同様に扱うことができる．ファイバー空間が単純ならば $E_2^{p,q}=H^p(B\,;H^q(F))$ であり，類似な図式はこのスペクトル系列を図解し，矢印が逆方向に向いているだけの違いである．

注意　§18で与えられたスペクトル系列に属する群の記述は，そこでは些か奇妙に見えたかもしれないが，今や正当化されたと思う．

§20. 最初の応用

Serre ファイバー空間がスペクトル系列をもっているという事実そのものには十分な情報量があり，これにより，いくつかのホモロジー群を決定できる．これができる場合はそんなに多くはないが，この方法の有効性が十分納得できる例証になっている．

特殊ユニタリー群 $SU(n)$ のホモロジー群

群 $SU(n)$ の元はよく知られた条件を満たす n 次元複素空間 $\boldsymbol{C}^n$ の変換である．群 $SU(n-1)$ は $SU(n)$ に標準的に埋め込まれた部分群とみなす．このとき，等質空間 $SU(n)/SU(n-1)$ は $(2n-1)$ 次元の球面である．すなわち，ファイバー空間 $SU(n)\xrightarrow{SU(n-1)}S^{2n-1}$ $(n\geq 2)$ がある．

$n=2$ の場合，ファイバーは1点であり，したがって $SU(2)=S^3$ である．$SU(2)$ の元は，行列

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\qquad \alpha,\beta\in\boldsymbol{C},\quad |\alpha|^2+|\beta|^2=1$$

として表わされるということを思いおこすと，同じ結果を別の方法で得ることもできる．実際，等式 $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ は $\boldsymbol{C}^2$ における3次元球面 S^3 を定義する．さらに，$SU(2)$ は絶対値が1の四元数の群であり，これは再び S^3 となる．等式 $SU(2)=S^3$ は，S^3 のホモロジー群がすでにわかっているから役に立つ．

$n=3$ については，ファイバー空間 $SU(3)\xrightarrow{SU(2)}S^5$，すなわち，$SU(3)\xrightarrow{S^3}S^5$ がある．このとき底空間とファイバーのホモロジー群を用いて，スペクトル系列の E_2 項を計算できる：

$$E^2_{p,q}=H_p(S^5\,;\,H_q(S^3))$$

	0	1	2	3	4	5	6		
	S^3								
4									
3	Z					Z			
2									
1									
0	Z					Z			S^5

この表から次元の関係により直ちに $d^2=d^3=d^4=\cdots=0$ がわかる．このとき $E^2=E^\infty$ であり，E^∞ において，$p+q=$一定 の各直線は高々１つの自明でない群を含む．すなわち，同伴群はもとの群と同一である．（これは，同伴群の性質 (3) からわかる．）このとき，$SU(3)$ のホモロジー群については $H_0\cong H_3\cong H_5\cong H_8\cong \boldsymbol{Z}$ かつ残りについては $H_q=0$ を得る．すなわち，

$$H_p(SU(3))\cong H_p(S^3\times S^5)$$

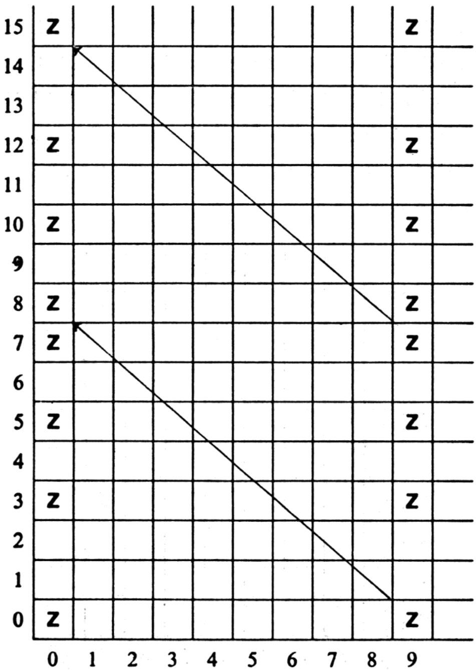
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	Z							Z	
7									
6									
5	Z							Z	
4									
3	Z							Z	
2									
1									
0	Z							Z	

である.

$n=4$ の場合，ファイバー空間 $SU(4)\xrightarrow{SU(3)}S^7$ を考える．$E^2_{p,q}=H_p(S^7\,;H_q(SU(3)))$ において次元を考慮して，$E^2=E^3=\cdots=E^\infty$．すなわち，スペクトル系列は再び自明であり，$SU(4)$ のホモロジー群は $H_0\cong H_3\cong H_5\cong H_7\cong H_8\cong H_{10}\cong H_{12}\cong H_{15}\cong \boldsymbol{Z}$ かつ残りについては $H_q=0$ である．言いかえれば，

$$H_q(SU(4))\cong H_q(S^3\times S^5\times S^7).$$

次元を考慮してスペクトル系列の自明性を1つ1つ確かめることにより，この操作が無限に行なえるという着想に迷わされてはいけない．実際，$n=4$ は単純に次元を考慮してスペクトル系列の自明性が得られる n の最後の値であることがわかる．$n=5$ についてはもっと情報が必要である．ファイバー空間 $SU(5)\xrightarrow{SU(4)}S^9$ を考えよう．E^2 項は次の通りである：



次元を考慮して，$d^2=d^3=\cdots=d^8=0$ を得るが，d_9 はちょっと見ると，$d^9_{9,0}: E^9_{9,0}\to E^9_{0,8}$，すなわち $d^9_{9,0}: \boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}$ であるから，零とは異なるかもしれない．実際には d^9 は零であるが，これは今使える事実のみを用いて証明することはできない．(ただし，次元を考慮して，$k>9$ については，すべての d^k は再び零であることがわかるから，d^9 は唯1つ「疑わしい」微分である．) 後で，次を証明する．

定理　$H_*(SU(n))\cong H_*(S^3\times S^5\times\cdots\times S^{2n-1})$

$n>2$ について，空間 $SU(n)$ と $S^3\times\cdots\times S^{2n-1}$ は互いに同相ではなく，異なるホモトピー群すらもつということを指摘しておく．(読者はこの証明を試みるのもよいが，それほど簡単ではない．)

第I章，§9において，懸垂について次の Freudenthal の定理：

任意の $i<n$ について $\pi_i(X)=0$ ならば，$i<2n-1$ について $\pi_i(X)\cong\pi_{i+1}(\Sigma X)$ である，

を定式化したが，そこでは，特別な $X=S^n$ の場合のみを証明した．Leray の定理を適用して今や一般的な命題を証明することができる．

注意　位相幾何学においては，とりわけ，懸垂とループ空間，1点和と直積，ホモトピーと(§2で述べた)コホモロジーの間の双対性を定める原理，いわゆる **Eckmann-Hilton 双対性**が存在する．この双対性原理のいくつかの例は次である．(以下，特に誤解がなければ，コホモロジーの整係数 $\boldsymbol{Z}$ は省略する．)

$$\begin{cases}\pi_i(X)\cong\pi_{i-1}(\Omega X) & \text{すべての } i \text{ について}\\ H^i(X)\cong H^{i+1}(\Sigma X) & \text{すべての } i \text{ について}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\pi_i(X\times Y)\cong\pi_i(X)\oplus\pi_i(Y) & \text{すべての } i \text{ について}\\ H^i(X\vee Y)\cong H^i(X)\oplus H^i(Y) & \text{すべての } i \text{ について}\end{cases}$$

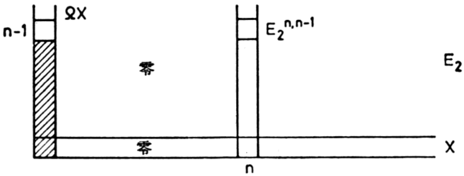
$$\begin{cases}\pi_i(X)\cong\pi_{i+1}(\Sigma X) & i \text{ にある制限をして}\\ H^i(X)\cong H^{i-1}(\Omega X) & i \text{ にある制限をして}\end{cases}$$

最後の同型，すなわち，第I章，§9で述べた一般の Freudenthal の定理を証明しよう．

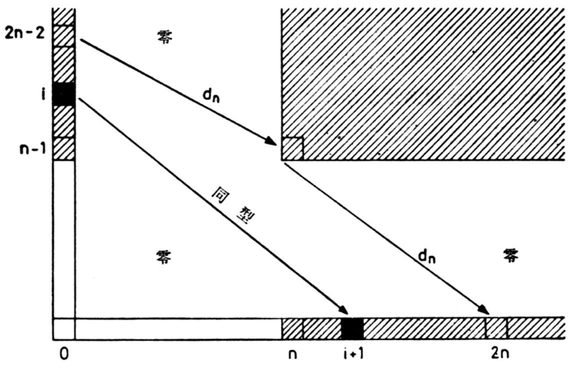
定理　X は CW 複体かつ各 $i<n$ について $\pi_i(X)=0$ ならば，$i\leq 2n-2$ について $\Sigma: \pi_i(X)\to\pi_{i+1}(\Sigma X)$ は同型である．

証明　よく知られているように，(任意の空間) X に対して，全空間 EX は

それ自身の中で1点に可縮，ファイバーは X 上のループ空間である Serre ファイバー空間 $*\simeq EX\xrightarrow{\Omega X}X$ が存在する．仮定より X は $(n-1)$ 連結，すなわち $\pi_0=\pi_1=\cdots=\pi_{n-1}=0$ であるから，$H^1(X)=\cdots=H^{n-1}(X)=0$ である．このとき，コホモロジー・スペクトル系列は次の図で与えられる：



さて $EX\simeq *$ であるから，E_∞ 項は $(0,0)$ 以外は零のみである．次元を考慮して，斜線の列の群からのすべての微分は零に等しい．したがって，この列そのものも，微分により E_∞ 項に修正せずに写されるので，零群のみを含む．零と異なる可能性のある元に影をつけて，もう一度 E_2 項を描こう．



左端の列の第 i 番目の群を考察しよう．i がそんなに大きくなければ，d_{i+1} のみが零と異なる．E_∞ は零なので，$d_{i+1}^{0,i}$ は同型（$\mathrm{Ker}\,d_{i+1}^{0,i}\cong E_\infty^{0,i}$; $\mathrm{Coker}\,d_{i+1}^{0,i}\cong E_\infty^{i+1,0}$）であり，したがって，$H^i(\Omega X)=E_2^{0,i}\cong E_2^{i+1,0}=H^{i+1}(X)$ である．

この結果が成り立つ最大の i を知ることさえできる．このとき，微分 d_{i+1} の矢印の「角」を忘れてはいけない．これはどのように考慮に入れられるのであ

ろうか？　$i \geq 2n-2$ ならば，もはや $d_{i+1}^{0,i}$ は $H^i(\Omega X)$ で定義された唯1つの自明でない微分というわけではない．（例えば，$i=2n-2$ ならば，自明でない微分 $E_n^{0,2n-2} \to E_n^{n,n-1}$ は依然としておこる可能性がある．）同様に $i \geq 2n$ の場合は，$E_r^{i,0}$ に値をもついくつかの自明でない微分がおこりうる．言いかえれば，$i=2n-3$ では，微分 d_{i+1} は依然としてこの角から外れているが，$i=2n-2$ ではひっかかっている．したがって，$i \leq 2n-2$ についてのみ $H^i(X) \cong H^{i-1}(\Omega X)$ である．

標準的な埋込み i_X と標準的な射影 π_X を次のように定義する：

$$i_X : X \to \Omega\Sigma X \Longleftrightarrow (i_X(x))(t) = (x, t),\ x \in X,\ t \in \boldsymbol{R}$$

$$\pi_X : \Sigma\Omega X \to X \Longleftrightarrow \pi_X(\varphi, t) = \varphi(t),\ \varphi \text{ は } X \text{ 上のループ}$$

ただし，懸垂については，2つのいささか異なる定義があるが，ここでは，

$$\Sigma X = X \times I/(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (* \times I),\ * \in X \text{ は基点}$$



とする．誘導された準同型 $\pi_X^* : H^i(X) \to H^i(\Sigma\Omega X)$ を調べよう．ここで $H^i(X)$ と $H^i(\Sigma\Omega X) \cong H^{i-1}(\Omega X)$ は $i < 2n-1$ について同型である．§21で証明されるように，この同型は特別な準同型 π_X^* により与えられる．次の系列

$$\Sigma X \xrightarrow{\Sigma i_X} \Sigma\Omega\Sigma X \xrightarrow{\pi_{\Sigma X}} \Sigma X$$

を考えよう．最初の写像は写像 i_X の普通の懸垂で，2番目のものは π_Y である，ただし，$Y = \Sigma X$．このとき，対応 $(x, t) \longmapsto (i_X(t), t) \longmapsto (i_X(x))(t) = (x, t)$ よりわかるように，合成 $\pi_{\Sigma X} \circ \Sigma i_X : \Sigma X \to \Sigma X$ は恒等写像である．

X が次元 $<n$ で非輪状ならば，ΣX も次元 $<n+1$ で非輪状であり，よって $\pi_{\Sigma X}$ は次元 $\leq 2(n+1)-2=2n$ において ΣX と $\Sigma\Omega\Sigma X$ のコホモロジー群の同型を誘導する．したがって，写像 $\Sigma i_X : \Sigma X \to \Sigma\Omega\Sigma X$ は次元 $2n$ までのコホモロジー群の間の同型を誘導し，写像 i_X は次元 $<2n$ における X と $\Omega\Sigma X$ のコホモロジー群の同型を誘導する．次に，i_X は単に X の $\Omega\Sigma X$ への埋込みであるという事実を利用する．対 $(\Omega\Sigma X, X)$ のコホモロジー完全系列

$$H^i(\Omega\Sigma X, X) \longrightarrow \underbrace{H^i(\Omega\Sigma X) \xrightarrow{i_X^*} H^i(X)}_{(i \leq 2n-1 \text{ について同型})} \longrightarrow H^{i+1}(\Omega\Sigma X, X)$$

を考える．これは，$i\leq 2n-1$ について $H^i(\Omega\Sigma X, X)=0$ を意味する．

したがって，$i\leq 2n-2$ ならば $H_i(\Omega\Sigma X, X)=0$ である．さて，相対 Hurewicz 定理により，この対のホモトピー群 $\pi_i(\Omega\Sigma X, X)$ は $i\leq 2n-2$ について零である．($n>2$ と仮定するから，定理は引用してよい．）この対の完全系列を用いて次を得る：射入 $i_X: X\to\Omega\Sigma X$ は $i\leq 2n-2$ についてホモトピー群の同型 $\pi_i(X)\cong\pi_i(\Omega\Sigma X)\cong\pi_{i+1}(\Sigma X)$ を誘導する．　（証明終）

いくつかの場合（例えば，§28 における H. Cartan の定理の証明の場合）には，Freudenthal の定理に次を付け加える必要がある．

定理　X が $(n-1)$ 連結ならば，懸垂準同型 $\Sigma: \pi_{2n-1}(X)\to\pi_{2n}(\Sigma X)$ は全射である．

証明　Whitehead の次の定理を思いおこす．X と Y は 2 つの任意の単連結な空間，$f: X\to Y$ は $f_*: \pi_2(X)\to\pi_2(Y)$ が全射である写像とする．このとき，次の 2 つの命題は同値である：

(1) 準同型 $f_*: \pi_m(X)\to\pi_m(Y)$ は $m<n$ について同型，$m=n$ について全射，

(2) 準同型 $f_*: H_m(X)\to H_m(Y)$ は $m<n$ について同型，$m=n$ について全射．

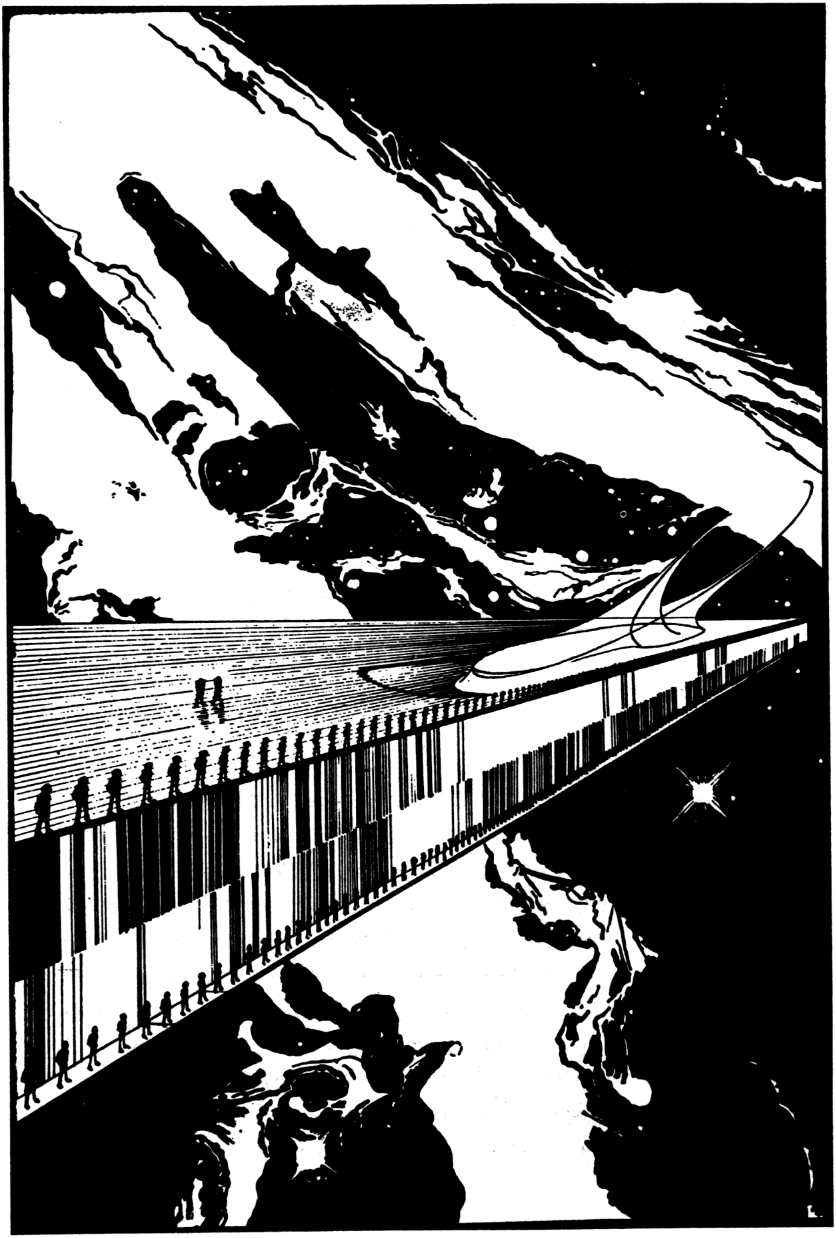
さて，定理の証明に戻ろう．コホモロジー・スペクトル系列よりむしろホモロジー・スペクトル系列を考える．この場合単に矢印を逆向きにして，前出の図式を使うことができる．明らかに $H_{2n-2}(X)\cong H_{2n-3}(\Omega X)$ である．したがって，X に ΣX を代入して，次が成り立つ：

$$H_{2n-1}(\Omega\Sigma X)\cong H_{2n}(\Sigma X)\cong H_{2n-1}(X)$$

この同型は射入 $i: X\to\Omega\Sigma X$ により誘導されるから，Whitehead の定理により準同型 $\pi_{2n-1}(X)\to\pi_{2n-1}(\Omega\Sigma X)\to\pi_{2n}(\Sigma X)$ は全射である．　（証明終）

注意 1　ここでは，$(2n-1)$ 次元ホモロジー群の間の同型を得ているが，これは Whitehead の定理が要求している以上のものである．それでも，これは対応するホモトピー群の間の全射，というより同型，を証明する手助けにはならない．Whitehead の定理は全射のみを意味し，それ以上のものは何も意味しない．

注意 2　実は，Whitehead の定理を引用せずに証明することもできる．同型 $H_{2n-1}(X)\cong H_{2n-1}(\Omega\Sigma X)$ は $H_{2n-1}(\Omega\Sigma X, X)=0$ を意味する（それ以下の次元



のすべての群は同型であることがわかっている）．相対 Hurewicz の定理を適用して，次の完全系列

$$\pi_{2n}(\Omega\Sigma X, X)\to\pi_{2n-1}(X)\to\pi_{2n-1}(\Omega\Sigma X)\to\pi_{2n-1}(\Omega\Sigma X, X)\to\pi_{2n-2}(X)$$

において，$\pi_{2n-1}(\Omega\Sigma X, X)=0$ である．ここで，一般に $\pi_{2n}(\Omega\Sigma X, X)\neq 0$，したがって，$\pi_{2n-1}(X)\to\pi_{2n-1}(\Omega\Sigma X)=\pi_{2n}(\Sigma X)$ はつねに全射であるが，必ずしも同型ではないことがわかる．

§21. Leray の定理についての補遺

X と Y は２つのフィルター付けられた空間，f は X から Y へのフィルター付けと両立する写像，すなわち，$f(X_k)\subset Y_k$, $k=0,\cdots,n$, とする．

このとき，f はホモロジー・スペクトル系列の間の準同型，すなわち各 p,q,r について，準同型 ${}^XE^r_{p,q}\to{}^YE^r_{p,q}$ を誘導する．これは微分と可換であり，したがって，群のすべての性質はこの準同型と可換である．同じことは，矢印のみを逆向きにしてコホモロジー・スペクトル系列についても言える．

今，２つのファイバー空間 (E_1, B_1, F_1, p_1) と (E_2, B_2, F_2, p_2) およびファイバー空間の間の写像，すなわち，次の可換な図が与えられていると仮定する：

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tilde f} & E_2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

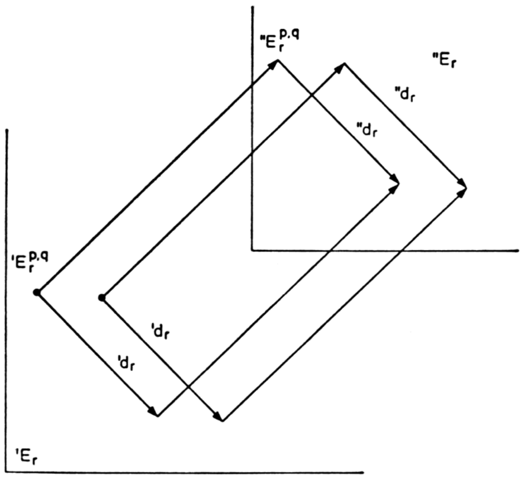
空間 B_1 と B_2 は（§19 の最初の節の注意を思いおこして）CW 複体であると仮定してよい．この CW 複体の間の写像は胞体写像にホモトープであるので，最初からそのようなものと仮定してよく，また $\tilde f: E_1\to E_2$ は E_1 と E_2 のフィルター付けと両立する写像と考えてよい．このとき，この写像はホモロジー・スペクトル系列の準同型 ${}'E^r_{p,q}\to{}''E^r_{p,q}$ を誘導する．（ただし ′ と ″ はそれぞれ第１と第２のファイバー空間のスペクトル系列の項に属するものである．）特に，準同型 ${}'E^2_{p,q}\to{}''E^2_{p,q}$ を考える．さて，$\tilde f$ はファイバー F_1 をファイバー F_2 に写す．容易にわかるように，${}'E^2_{p,q}\to{}''E^2_{p,q}$ は $f: B_1\to B_2$ と $\tilde f|_{F_1}: F_1\to F_2$ により誘導される準同型 $H_p(B_1\,;\,H_q(F_1))\to H_p(B_2\,;\,H_q(F_2))$ と一致する．

群 $E^r_{p,q}$ の準同型は微分の作用と可換であるから，もし準同型 ${}'E^k_{p,q}\to{}''E^k_{p,q}$ が各 p と q についてある特別な $k=r$ に対して同型ならば，すべての $k\geq r$ に対

しても同型であり，微分 $'d^k_{p,q}$ と $''d^k_{p,q}$ は同じように作用する．

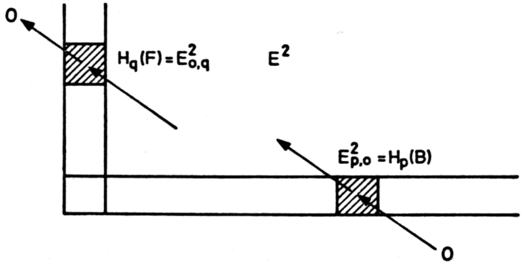
同型を除けばスペクトル系列は底空間の特別な胞体構造に無関係である．実際，底空間が何らかの胞体に分割されているならば，底空間の恒等写像を底空間からそれ自身への胞体写像に結ぶホモトピーが存在して，これは第1の胞体分割から第2のものへの胞体写像である．このホモトピーは上に示されたように，$'E^2$ と $''E^2$ の間の同型を誘導し，したがって各 $r\geq 2$ について $'E^r$ と $''E^r$ は同型になる．

同様な命題は（矢印の向きを除いて）コホモロジー・スペクトル系列についても成り立つ．



さて，Serre ファイバー空間 $p: E\to B$ のホモロジー・スペクトル系列を調べよう．Leray の定理は，一般状況をよく把握する3つの命題を付け加えて，通常もっと詳細に定式化される．第1のものは左端の列に関しており，第2のものは底の行に関しており，第3のものは左端の列と底の行の間の関係についての情報を与える．

E^2 項の左端の列は群 $H_q(F)$ から成り，$H_2(F)$ のすべての元は d^2 の作用に関して輪体である．これらの元のあるものは E^2 項の表の内部からくる元の像になり，したがって $H_q(F)=E^2_{0,q}$ から $E^3_{0,q}$ への移行は商群への分解であり，以



下同様である．すなわち，連続した各段階は前の群の商群への分解になる．最終的にある群 $E^{\infty}_{0,q}={}_{(0)}H_q(E)/{}_{(-1)}H_q(E)=\mathrm{Im}\,H_q(E^0)\subset H_q(E)$ に到達する．すなわち，次の準同型の系列

$$H_q(F)=E^2_{0,q}\to E^2_{0,q}/\cdots\to E^3_{0,q}/\cdots\to\cdots\to E^{\infty}_{0,q}\subset H_q(E)$$

が得られる．ここで，すべての矢印は群からその商群への射影であり，最後の段階で埋込みを得る．すなわち，準同型 $H_q(F)\to H_q(E)$ を得たことになる．

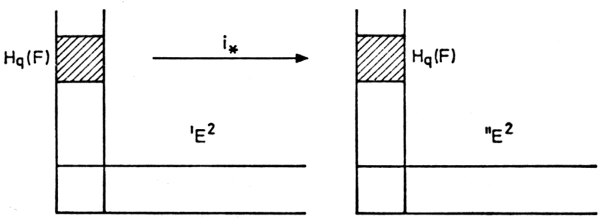
さて，埋込み $i:F\to E$ とホモロジー群の対応する準同型が存在するが，Leray の定理への最初の補遺は次である．

命題　われわれが構成した準同型は埋込み $i:F\to E$ により誘導された準同型 i_* に他ならない．

証明　ファイバー空間 (E,B,F,p) と $(F,*,F,p)$ と自明な埋込み

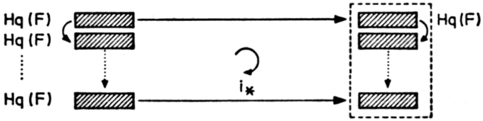
$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{i} & E \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ * & \longrightarrow & B \end{array}$$

を考える．これはホモロジー・スペクトル系列の準同型 $'E^r\to''E^r$ を誘導する：



$(F,*,F,p)$ のスペクトル系列 $\{'E^r\}$ は自明で唯1つの列から成り，準同型 i_*

は射入 $i: F \to E$ により誘導される．E^r から E^{r+1} へ移行する各段階 $(r \geq 2)$ で，左側の図は変わらず，右側の図の左端の列では考えた商群への分解の過程が始まる．これが終わると，左の図では前と同じ $H_q(F)$ をもち，一方，右の図では結果として準同型の系列を得る．われわれが考えている準同型の系列は，次の図で点線で囲まれている．左の列には同じ群 $H_q(F)$ が並んでいる．



さて，第2項において準同型 $'E^2_{0,q} \to ''E^2_{0,q}$ は同型であることおよびこの図は可換であることに注意しよう．このとき，結果として得られる正方形で，上の矢印と左の矢印はいずれも同型である．よって，最初の命題は証明された．

（証明終）

第2番目の補遺を考えよう．E^2 項の底の行，すなわち，族 $\{H_q(B)\}$ を調べることから始める．$E^2_{q,0}$ の元はどれも微分の像になりえないから，$E^2_{q,0}$ から $E^3_{q,0}$ へ移行するときは（微分 d^2 により零に写される）輪体ではない $E^2_{q,0}$ のすべての元を「清掃」する，すなわち，無視するだけで商群への分解は起こらない．言いかえれば，$E^2_{q,0}$ から $E^3_{q,0}$ への移行は $H_q(B)$ 全体からある部分群への移行を意味し，これが繰り返されて，次の包含系列を得る：

$$H_q(B) = E^2_{q,0} \supset E^3_{q,0} \supset E^4_{q,0} \supset \cdots \supset E^\infty_{q,0}$$

すなわち，$E^\infty_{q,0} \subset H_q(B)$ である．一方，$E^\infty_{q,0}$ は $H_q(E)$ の商群であることはわかっている．したがって，$H_q(E)$ から $E^\infty_{q,0}$ へ，そして，$H_q(B)$ への自然な準同型があり，準同型 $H_q(E) \to H_q(B)$ を得たことになる．Leray の定理に2番目に追加する命題は次である．

命題　この得られた準同型は，射影 $p: E \to B$ により誘導されたホモロジー群の準同型に他ならない．

証明　議論は前述の考察を繰り返すだけである．もう一度，2つのファイバー空間 (E, B, F, p) と $(B, B, *, \pi)$ および次ページのファイバー空間の間の写像を考える．2番目のファイバー空間のスペクトル系列は，$''E^r$ から $''E^{r+1}$ への移行で変わらない最初の行のみから成る．$p_*: {'E^2} \to {''E^2}$ の下で，第1行の元

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ p\ } & B \\ {\scriptstyle F}\big\downarrow{\scriptstyle p} & \curvearrowright & {\scriptstyle *}\big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B & \longrightarrow & B \end{array}$$

は同型に写され，このとき $'E^2_{p,0}$ から $'E^3_{q,0}$ へなどの移行により，考えている準同型の系列を実現する過程が始まる．証明の残りの議論は，上述のものと逐語的に同じである．よって，第2の補遺は証明された．　(証明終)

ホモロジー・スペクトル系列に関する2つの命題を証明した．コホモロジーの場合，証明は同様であるから，この扱いは命題の定式化のみにとどめる．

命題　準同型

$$H^q(B)=E_2^{q,0}\to E_2^{q,0}/\bigcup_{r\geq 2}\mathrm{Im}\,d_r=E_\infty^{q,0}={}^{(q-1)}H^q(E)\subset H^q(E)$$

と

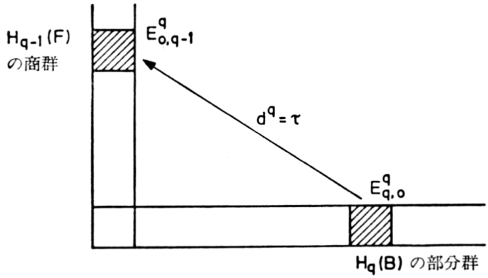
$$H^q(E)\to H^q(E)/{}^{(0)}H^q(E)=E_\infty^{0,q}=\bigcap_{r\geq 2}\mathrm{Ker}\,d_r^{0,q}\subset E_2^{0,q}=H^q(F)$$

は，それぞれファイバー空間の射影とファイバーの射入により誘導された準同型 $p^*: H^q(B)\to H^q(E)$ と $i^*: H^q(E)\to H^q(F)$ に一致する．

最も興味深い補遺は3番目のものであり，特に転入の定義を含むので，ファイバー空間の理論やコンパクト Lie 群のコホモロジー論に顕著な役割を果たす概念である．

転　入

項 E_2 を調べよう．われわれは第1行と第1列の様子を調べていたとき，r が大きくなるにつれて，この行の $E^2_{q,0}$ は小さくなり，その部分群で置き換えられるという意味でこの行の元は「整理」され，一方，この列の群 $E^2_{0,q}$ は商群により置き換えられることを考察した．すなわち，この2つの群はまったく違った方法で減少していったのである．したがって，もしある r で止めれば，場所 $(q,0)$ で $H_q(B)$ の部分群が，$(0,q-1)$ で $H_{q-1}(F)$ の商群が見つかるであろう．もし $r=q$ で止めれば，適当な微分 d^q がちょうど場所 $(q,0)$ から $(0,q-1)$ へ作用しているのがわかるであろう．このとき，微分 $d^q: E^q_{q,0}\to E^q_{0,q-1}$ は**転入**とよばれ，τ と表わされる．転入は，部分的に定義された多価の写像である．実際，これは部分群から商群への（したがって，あらゆる所で定義されている



のではなく，定義域の各元に1つの剰余類を対応させる）写像である．$E^q_{q,0}$ に属する $H_q(B)$ の元は**転入的**とよばれる．

さて，純粋に幾何学的な構成を考えよう．対の写像 $p:(E,F)\to(B,*)$ は準同型 $p_*:H_q(E,F)\to H_q(B,*)=H_q(B)$ を誘導する．対 (E,F) の完全系列の境界準同型により，($q\geq 2$ かつ底空間は単連結であると仮定して)次の図を得る：

$$H_q(B)=H_q(B,*)\xleftarrow{p_*}H_q(E,F)\xrightarrow{\partial}H_{q-1}(F)$$

$$\gamma=p_*^{-1}$$

このとき，Leray の定理への第3の補遺は次の公式である．

命題　$\partial\circ\gamma=\tau$

転入の概念はコホモロジーの場合にも同様に定式化される．このとき，ファイバーと底空間は場所を変え，転入的な元はファイバーFのコホモロジーに現われ，$\tau:[H^q(F)$ の部分群$]\to[H^{q+1}(B)$ の商群$]$ である．

次に，いわゆる「転入的双対鎖」を適用して，コホモロジーの言葉で転入の定義を与えよう．(E,B,F,p) はファイバー空間とする．射入 $i:F\to E$ は双対鎖群 $\mathscr{C}^q(E)$ から双対鎖群 $\mathscr{C}^q(F)$ への全射 $i^*:\mathscr{C}^q(E)\to\mathscr{C}^q(F)$ を誘導する．写像 $p^*:\mathscr{C}^{q+1}(B)\to\mathscr{C}^{q+1}(E)$ は標準的な単射準同型であり，したがって，$\mathscr{C}^{q+1}(B)$ は $\mathscr{C}^{q+1}(E)$ に埋め込まれる．双対鎖群 $\mathscr{C}^{q+1}(B)$ の $\mathscr{C}^{q+1}(E)$ における像は**基本双対鎖群**とよばれる．元 $z\in H^q(F)$ は，双対鎖 $\alpha\in\mathscr{C}^q(E)$ が存在して，$i^*(\alpha)\in z$ かつ $\delta\alpha$ (α の双対境界輪体) が基本双対鎖となるとき**転入的**であるといわれる．$p^*(\omega)=\delta\alpha$ ならば，双対鎖 $\omega\in\mathscr{C}^{q+1}(B)$ (ω は双対輪体) の類は

前転入 $\hat{t}$ の下での類 z の像とよばれ，$\{\omega\}=\hat{t}(z)$ と表わされる．

$i^*(\alpha)\in Z^q(F)$ は(**転入双対鎖**とよばれる)双対輪体であるが，双対鎖 α は一般には双対輪体ではない．すなわち，一般には $\delta\alpha\neq 0$ である．$H^q(F)$ の転入的元は部分群をなし，したがって，$\hat{t}$ は $H^q(F)$ 全体というより，ある部分群で定義される．さらに，双対輪体 ω は一意的には定まらない．実際，$p^*(\omega_1)=\delta\alpha_1$, $p^*(\omega_2)=\delta\alpha_2$ かつ $i^*(\alpha_1)=i^*(\alpha_2)\in z$ と仮定すると，$\omega_1-\omega_2=\tilde{\omega}$ である．ただし，$\tilde{\omega}$ は $p^*(\tilde{\omega})=\delta\tilde{\alpha}$ かつ $i^*(\tilde{\alpha})=0$ を満たす元である．この $\tilde{\omega}$ 型の双対輪体の類は部分群 $\Gamma^{q+1}(B)\subset H^{q+1}(B)$ をなし，$\hat{t}$ による元 z の像は $\Gamma^{q+1}(B)$ の元を法にして $H^{q+1}(B)$ で定義される．したがって，写像

$$\tau: T^q(F)\to H^{q+1}(B)/\Gamma^{q+1}(B) \Longleftrightarrow \tau(z)=\hat{t}(z) \bmod \Gamma^{q+1}(B)$$

を得る．ただし，$T^q(F)$ は $H^q(F)$ の転入的元の集合を表わす．このとき，写像 τ は**転入**とよばれる．要するに，この定義は，転入とは，次の合成

$$H^{q-1}(F)\xrightarrow{\delta} H^q(E,F)\xrightarrow{(p^*)^{-1}} H^q(B)$$

により与えられた $H^{q-1}(F)$ から $H^q(B)$ への部分的に定義された多価準同型であると言い表わしている．

演習　この「相対的」な定義は「転入鎖」を用いた定義に同値であることを証明せよ．

演習　「転入鎖」を適用して，転入のホモロジーの定義を定式化せよ．

命題の証明　さて，Leray の定理へ追加した第3の命題を証明しよう．すなわち，微分 $d^q_{q,0}$ は，転入鎖の言葉でホモロジーの場合に定義された転入と一致することを証明する．(とにかく，コホモロジーの場合に完全に同じであるが，実際には，ホモロジーの場合の定義を与えてはいない．)　最初の節から定義の1つを思いおこそう．元 $\alpha\in E^0_{i,q-i}=\mathscr{C}_q(X_i)/\mathscr{C}_q(X_{i-1})$ が $Z^r_{i,q-i}\subset E^0_{i,q-i}$ に属するための必要十分条件は，α の代表元 $a\in\mathscr{C}_q(X_i)$ が存在して，その境界 ∂a は α のものより r 小さいフィルターをもつ，すなわち $\partial a\in\mathscr{C}_{q-1}(X_{i-r})$ となることである．

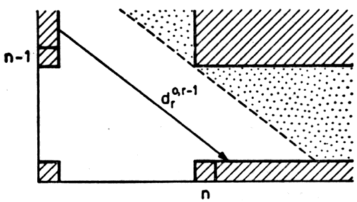
ファイバー空間の場合には $X_i=p^{-1}(B^i)$，ただし B^i は底空間の i 切片，である．$i=q, r=q$ とおく．このとき，(前に証明したように一般性を失うことなく複体 B は唯1つの頂点をもつと仮定して) $\mathscr{C}_{q-1}(X_{i-r})=\mathscr{C}_{q-1}(p^{-1}(B^0))=\mathscr{C}_{q-1}(F)$ である．すなわち，$\alpha\in Z^q_{q,0}$ であるための必要十分条件は，α が $\partial a\in\mathscr{C}_{q-1}(F)$ を満たす代表元 $a\in\mathscr{C}_q(E)$ をもつことである．

微分 $d^q_{q,0}$ については，次が成り立つ．群 $E^2_{q,0}=H_q(B)$ には，$p_*:\mathscr{C}_q(E)\longrightarrow\mathscr{C}_q(B)$による原像 $\tilde{a}\in\mathscr{C}_q(E)$ が $\partial\tilde{a}\in\mathscr{C}_{q-1}(F)$ （$\Longleftrightarrow\tilde{a}\in Z^q_{q,0}$）を満たすような双対鎖 $a\in\mathscr{C}_q(B)$ により表わされるすべての元 $\alpha\in H_q(B)$ から成る部分群 $E^q_{q,0}$ がある．最初の条件は $\tilde{a}$ が $E \bmod F$ の相対輪体であることを表わしている．輪体 $\partial\tilde{a}\in\mathscr{C}_{q-1}(F)$ のホモロジー類は，転入の定義により $\tau\alpha$ の値の１つであり，微分の定義により，$d^q_{q,0}\alpha$ の代表元でもある．（証明終）

以下では，何度も繰り返された古い定義のみを含む証明がむしろしばしば出てくる．

転入が明白な幾何学的意味をもつ１つの重要な例を考察しよう．

$\pi:E\overset{F}{\longrightarrow}B$ は $\pi_1(B)=0$ かつ E が可縮であるファイバー空間とする．B は次元 n まで球面的，すなわち，$i<n$ について $\pi_i(B)=0$ とする．（ファイバー空間 $EX\overset{\Omega X}{\longrightarrow}X$ を考えた）§2の議論を繰り返して，コホモロジー・スペクトル系列について次の図を得る．微分 $d^{0,r-1}_r$ は角が影響を及ぼさない限り同型である．

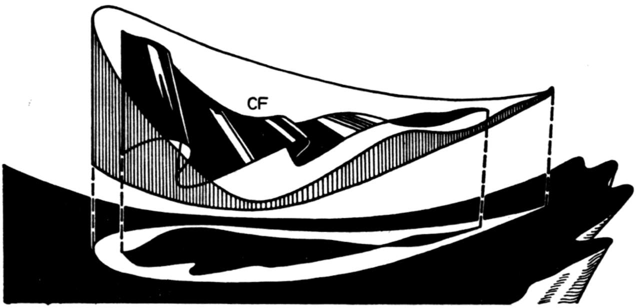


（ただし，この同型は $H^i(F)$ と $H^{i+1}(B)$ の間のものを意味する．というのは，十分大きい各 r について $d^{0,r-1}_r$ は同型であるが，$r>2n-1$ ならば同型は $H^{r-1}(F)$ と $H^r(B)$ の間というよりむしろ $H^{r-1}(F)$ の部分群と $H^r(B)$ の商群の間のものになる．）

さて，次を証明しよう．

定理　小さい次元（$r\leq 2n-1$）で同型かつすべての次元で転入 τ の逆写像になる写像 $H^r(B)\to H^{r-1}(F)$ を構成できる．

証明　E は可縮であるから，F も E において可縮で，射入 $F\to E$ は錐 CF から E への写像に拡張できる．（この拡張は，もちろん，一意的には定まらない．）射影 π は錐の底 $F\times\{0\}$ を１点に写し，したがって，写像 $\varphi:\Sigma F\to B$ が得られ



る．これはコホモロジー群の準同型 $\varphi^*: H^r(B) \to H^r(\Sigma F) \to H^{r-1}(F)$ を誘導する．この準同型は r の各値について定義され，空間の間の写像 φ により誘導されている．一方，各 r について転入 τ が定義され，$H^{r-1}(F)$ の部分群と $H^r(B)$ の商群の間の写像(この場合は，同型)となる． この逆写像は， $H^r(B)$ の商群を $H^{r-1}(F)$ の上へ写す．すなわち，これは $H^r(B)$ から $H^{r-1}(F)$ への(一価の)準同型とみなしてよい．これが φ^* と一致することを示したい．(特に，これは準同型 φ^* が φ の構成法に無関係であることを意味する．)

r が小さければ，転入と φ^* はいずれも同型である． この場合， 定理の意味は互いに逆写像であるということである． これは， Serre ファイバー空間の特別な場合 $EX \xrightarrow{\Omega X} X$ について§19で用いられた． (EX を通常の通り1点に縮めて得られる)写像 $\pi_X: \Sigma\Omega X \to X$ は，φ に対する可能な選択の1つである．したがって， 同型 $H^q(X) \xrightarrow{\pi_X^*} H^q(\Sigma\Omega X) \xrightarrow{(\Sigma)^{-1}} H^{q-1}(\Omega X)$ と $(d_q^{0,q-1})^{-1}$ は一致する．(これですべての利子と共に負債を支払ったことになる．)

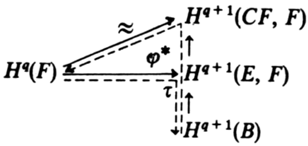
さて，定理を証明しよう．写像の系列 $(CF, F) \to (E, F) \to (B, *)$ を構成する．ただし，最初のものは埋込み， 2番目のものは射影である．最初の写像により誘導されたコホモロジー完全系列の写像を考え，次の(他のすべてのものと同様可換な)図の正方形を調べる：

$$\begin{array}{ccc} H^q(F) & \xrightarrow{\approx} & H^{q+1}(CF, F) \\ \uparrow & \curvearrowright & \uparrow \\ H^q(F) & \longrightarrow & H^{q+1}(E, F) \end{array}$$

ここで正方形の２つの横列の矢印は同型である．次の系列全体およびその合成写像を考える：

$$H^{q+1}(B)\to H^{q+1}(E,F)\to H^{q+1}(CF,F)\xrightarrow{\cong}H^{q+1}(\Sigma F)\xrightarrow{\cong}H^{q}(F)$$

これが考えている写像 φ^* である．全体を１つの図

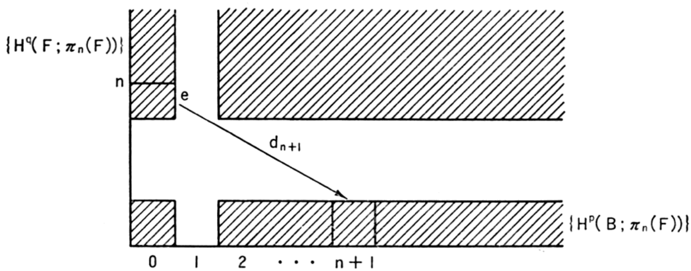


に集めよう．点線は転入 τ と上の準同型を表わす．３角形は可換なので，$\varphi^*\circ\tau\equiv 1_{H^q(F)}$ である．すなわち，互いにそれらは逆写像になっている．（証明終）

切断に対する最初の障害

ファイバー空間の特性類，すなわち，切断を拡張する最初の障害（§17 の末尾参照）の定義の仕方と計算法を示そう．

ファイバー空間 $E\xrightarrow{F}B$ においてファイバー F は $(n-1)$ 連結とし，底空間 B は単連結であると仮定する．（これは，この仮定が本質的であった障害理論のためである．）$\pi_n(F)$（$i<n$ ならば $\pi_i(F)=0$）に係数をもつコホモロジー・スペクトル系列を考える．この E_2 項は次の通りである：



E_2 項の列における最初の自明でない群は $H^n(F;\pi_n(F))$ である．ファイバー F は $(n-1)$ 連結であるから，$H^n(F;\pi_n(F))$ に標準的に特別な元が存在する．すなわち，次元 n の各胞体は，$\pi_n(F)$ の元を定義する n 次元球面であり，これは $\pi_n(F)$ に係数をもつ（実は双対輪体である）１つの n 次元双対鎖 $\bar{e}$ が定義

されることを意味する．（この構成はすでに用いたが，空間 $K(\pi, n)$ に応用したのみである．$\mathscr{C}^n(F;\pi_n(F))$ の双対鎖 $\bar{e}$ が双対輪体であるという事実は，$K(\pi, n)$ における双対鎖 $\bar{e}$ が双対輪体であるという証明を繰り返すことにより確かめることができる．）

この双対輪体 $\bar{e}$ の類を $e\in H^n(F;\pi_n(F))$ で表わす．これは§17 において基本コホモロジー類と呼んだものと同じである．

この元 e は $E_2^{0,n}$ に属する．これは微分の像とはならず，E_2 項においては第1行から第 $(n-1)$ 行まで自明であるから，微分 $d_r\ (2\leq r\leq n)$ に関して輪体である．したがって，e は転入的，すなわち，$E_{n+1}^{0,n}$ に属し，転入 $\tau=d_{n+1}$ は e を $\tau(e)\in H^{n+1}(B;\pi_n(F))$ に写す．

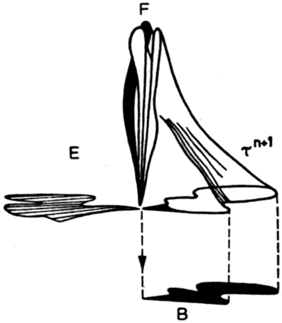
命題　この元 $\tau(e)$ はファイバー空間の特性類である．

証明　ある制限の下に，これを証明しよう．B は唯1つの頂点をもつ単連結な CW 複体，E は CW 複体，$p:E\rightarrow B$ は胞体写像とする．さらに，各胞体 $\sigma\subset B$ の逆像 $p^{-1}(\sigma)$ は，E の全胞体の和集合から成る（すなわち，E の任意の胞体が $p^{-1}(\sigma)$ と交わるならば，$p^{-1}(\sigma)$ に含まれる）と仮定する．最後の仮定は，E の n 切片が（B の唯1つの頂点の p による逆像である）$F\subset E$ の n 切片と底空間 B の n 切片上の切断とから成ると仮定するものである．これらの制限は，任意の Serre ファイバー空間が，要求された性質をもつファイバー空間にホモトピー同値であることを示すことにより克服することができる．これを一般に証明するのは，これから出会う特別な場合のいずれよりも難しいけれど，読者はこの証明を試みてほしい．

ホモロジー類 $e\in H^n(F;\pi_n(F))$ の代表元 $\bar{e}\in\mathscr{C}^n(F;\pi_n(F))$ および B^n 上で与えられた切断により定義される双対鎖 $c\in\mathscr{C}^{n+1}(B;\pi_n(F))$ を考える．このとき，群 $\mathscr{C}^{n+1}(E;\pi_n(F))$ は双対鎖 $\delta\bar{e}$ と p^*c を含む．次に，

$$\delta\bar{e}=p^*c$$

が成り立つのを示す．τ^{n+1} は複体 E の胞体とする．仮定からわかるように，τ^{n+1} は底空間の胞体 σ^{n+1} かまたはもっと小さい次元の胞体に射影される．境界 $\partial\tau^{n+1}$ は和 $\alpha_1+\alpha_2$，ただし $\alpha_1\in\mathscr{C}_n(F)$ かつ $\alpha_2=p^*(\partial\sigma^{n+1})$，である．（$\tau^{n+1}$ が $n+1$ より小さい次元の胞体に射影されると $\alpha_2=0$ である．）明らかに，$\delta\bar{e}(\tau^{n+1})=\bar{e}(\alpha_1)$ であり，鎖 α_1 のホモトピー類を得る．（$\mathscr{C}_n(F)$ における鎖は，球面である F の n 次元胞体の線型結合である．）一方 $p^*c(\tau^{n+1})=c(p_*\tau^{n+1})=c(\sigma^{n+1})$



である．これは σ^{n+1} の境界上の切断により $\pi_n(F)$ において定義される類 $\alpha_2=p^*(\partial\sigma^{n+1})$ である．この射影は，α_1 にホモトープな球写像を定義し，このときホモトピーは，胞体 τ^{n+1} の像により実現される．したがって，$\delta\bar{c}=p^*c$ である．

（証明終）

§22. コホモロジー・スペクトル系列における積

これまでは，矢印が逆向きであるということ以外は重要な違いを経験せずに，ホモロジー・スペクトル系列とコホモロジー・スペクトル系列を用いてきた．この理由は明らかで，コホモロジーの乗法構造を一度も使わなかったからである．以下では，コホモロジー・スペクトル系列のみを考え，係数群は環（例えば，体または$\boldsymbol{Z}$）と仮定する．このとき，スペクトル系列は乗法構造をもつ．

実際，各 $r\geq 2$ について群 $E_r=\oplus_{p,q}E_r^{p,q}$ に微分

$$d(a\cdot b)=da\cdot b+(-1)^{p+q}a\cdot db,\quad a\in E_r^{p,q},\quad b\in E_r^{p',q'}$$

と両立する同次な積（$\Longleftrightarrow$写像 $E_r^{p,q}\otimes E_r^{p',q'}\to E_r^{p+p',q+q'}$ が存在）を与えることができ，しかも，E_{r+1} の積は E_r で与えられた積により誘導される．

Leray の定理により，スペクトル系列における積は E_2 と E_∞ で定義されたものと両立する．これをもっと正確にかつ詳細に定式化しよう．群 $E_2=\oplus_{p,q}E_2^{p,q}$ を考える．ただし，$E_2^{p,q}=H^p(B\,;H^q(F))$ である．上述したことにより E_2 は環である．一方，$\oplus_q H^q(F)$ も環であり，したがって $\oplus_p H^p(B\,;\oplus_q H^q(F))$ も環であるから，$\oplus_{p,q}H^p(B\,;H^q(F))=\oplus_p H^p(B\,;\oplus_q H^q(F))$ は環である．こ

のとき

定理　環 E_2 は $\bigoplus_p H^p(B;\bigoplus_q H^q(F))$ に同型である.

（同様なことは任意の係数環について正しい.）

さて，E_2 の部分群 $\bigoplus_p E_2^{p,0}$ を考える．われわれが定式化した定理は次を意味する：環 $\bigoplus_p E_2^{p,0}$ と $H^*(B)$ は同型である．同様に，環 $\bigoplus_q E_2^{0,q}$ と $H^*(F)$ も同型である.

次の普遍係数公式を思いおこそう：

$$0 \to H^p(B)\otimes H^q(F) \to H^p(B;H^q(F)) \to \mathrm{Tor}\,(H^{p+1}(B),H^q(F)) \to 0$$

E_2 項は明らかに $H^p(B)\otimes H^q(F)$ に同型な部分群を含む．もし，ファイバーか底空間のどちらかのコホモロジー群が torsion をもたないならば，$\mathrm{Tor}=0$ であり，したがって $H^p(B;H^q(F))=H^p(B)\otimes H^q(F)$ となる．明らかに同じことは係数が体であるときも正しい.したがって,K が体か，$K=\boldsymbol{Z}$ かつ底空間またはファイバーが torsion をもたないときは，いつでも，$E_2=H^*(B;K)\otimes H^*(F;K)$ である．このとき，E_2 項における積は次の式で与えられる：

$$(a'b')\circ(a''\otimes b'')=(-1)^{\dim b'\cdot\dim a''}(a'a''\otimes b'b'')$$

われわれが扱う E_2 項は通常テンソル積として与えられる.（$H^p(B)\otimes H^q(F)$ が E_2 と一致しないときでも，これは E_2 の部分群かつ部分環であり，積は同じ式で与えられる.）例えば，§20 で考察した例のように，ユニタリー群の場合がこれである.

次に，E_∞ 項を考える．環 A が積と両立するフィルター付け（$\Longleftrightarrow A_p\cdot A_q\subset A_{p+q}$）をもっているときはいつでも，同伴群 $\mathscr{G}A$ は環構造をもつ．実際，$\alpha\in A_p/A_{p+1}$ かつ $\beta\in A_q/A_{q+1}$ ならば，これらに対して，次のように $A_{p+q}/A_{p+q+1}\subset\mathscr{G}A$ の元を与えることができる：A_p と A_q からそれぞれ代表元 $a\in\alpha$ と $b\in\beta$ をとると，積 ab は A_{p+q} にあり，A_{p+q}/A_{p+q+1} においてその代表する元は α と β のみに依存する．これを $\alpha\cdot\beta$ で表わす.

容易にわかるように，フィルター付け

$$\cdots\subset{}^{(2)}H^*(E)\subset{}^{(1)}H^*(E)\subset{}^{(0)}H^*(E)\subset{}^{(-1)}H^*(E)=H^*(E)$$

は $H^*(E)$ の積と両立し，同伴群 E_∞ において誘導される積は E_2 の積から E_∞ に移行して E_∞ において得られたものと一致する.

注意　同伴環における積は常にもとの環の積より多少情報が貧弱である．$a,b\in E_\infty$ とすると，$E_\infty^{p,q}$ の構成によりこれらは $H^*(E)$ の元の族（剰余類）で

ある．E_∞ において $a\cdot b=c$ かつ $c\neq 0$ と仮定する．したがって，このとき，c に対応する $H^*(E)$ の元の族は零元を含まない．すなわち，もし E_∞ において積が自明でないならば，$H^*(E)$ においても自明でない，すなわち，$H^*(E)$ 上で得られる情報量はこの場合意義がある．しかし，$a\cdot b=0$ かつ $a\neq 0$, $b\neq 0$ ならば類 $a\cdot b$ は考えているよりも（少なくとも1つだけ）高いフィルターの剰余類に属する代表元を含む．すなわち，$H^*(E)$ における積は零と異なるかもしれない．言いかえれば，E_∞ における積の自明性は $H^*(E)$ における自明性を意味しない．結果として，$H^*(E)$ について得られる情報は完全とは言えない．

スペクトル系列における積は次のように構成される．X と Y が2つの空間であり，$c_1\in\mathscr{C}^k(X)$，$c_2\in\mathscr{C}^l(Y)$ ならば，テンソル積 $c_1\otimes c_2$ は次式により定義される：

$$c_1\otimes c_2\in\mathscr{C}^{k+l}(X\times Y)\Longleftrightarrow(c_1\otimes c_2)(f)=c_1(\pi_X f|_{A_0,\dots,A_k})c_2(\pi_Y f|_{A_k,\cdots,A_{k+l}})$$

ただし，$f:(A_0,\cdots,A_{k+l})\to X\times Y$ は特異単体，$\pi_X: X\times Y\to X$ と $\pi_Y: X\times Y\to Y$ は射影であり，積は係数の値域の環構造の意味で考えていること，および等式

$$\delta(c_1\otimes c_2)=\delta c_1\otimes c_2+(-1)^k c_1\otimes\delta c_2$$

が成り立っていることを思いおこそう．コホモロジーに移って，積

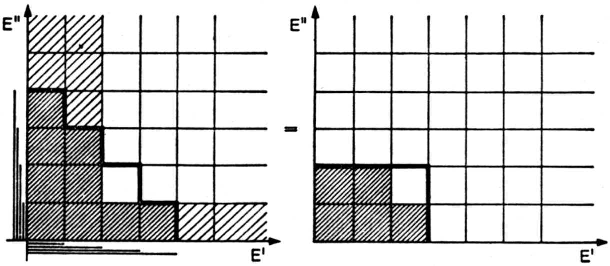
$$H^k(X)\otimes H^l(Y)\to H^{k+l}(X\times Y)$$

が得られる．対角写像 $\varDelta: X\to X\times X$ を用いて，2項演算・($\Longleftrightarrow H^*(X)\ni\alpha,\beta$ に対して $\alpha\cdot\beta=\varDelta^*(\alpha\otimes\beta)\in H^*(X)$)が $H^*(X)$ に導入される．

この演算の類似なものは相対鎖にも定義される．$c_1\in\mathscr{C}^k(X,X_1)$ かつ $c_2\in\mathscr{C}^l(Y,Y_1)$ ならば，次が得られる：

$$c_1\otimes c_2\in\mathscr{C}^{k+l}(X\times Y,X_1\times Y\cup X\times Y_1)$$

ファイバー空間のスペクトル系列の積は，2つの異なるファイバー空間の積についても最初から定義される．(E',B',F',p') と (E'',B'',F'',p'') はファイバー空間，$(E'\times E'',B'\times B'',F'\times F'',p'\times p'')$ はこれらの積とする．$\{(E')_p\}$，$\{(E'')_p\}$ と $\{(E'\times E'')_p\}$ は底空間の切片の原像により与えられるフィルター付けを表わすとする．$\{'E_r^{p,q},'d_r^{p,q}\}$，$\{''E_r^{p,q},''d_r^{p,q}\}$，$\{E_r^{p,q},d_r\}$ はそれぞれファイバー空間 (E',B',F',p')，(E'',B'',F'',p'')，$(E'\times E'',B'\times B'',F'\times F'',p'\times p'')$ のコホモロジー・スペクトル系列を表わし，$\alpha_1\in{}'E_1^{p_1,q_1}\cong H^{p_1+q_1}((E')^{p_1},(E')^{p_1-1})$，$\alpha_2\in{}''E_1^{p_2,q_2}\cong H^{p_2+q_2}((E'')^{p_2},(E'')^{p_2-1})$ とする．このテンソル積は



（切除定理により）

$$\alpha_1 \otimes \alpha_2 \in H^{p_1+q_1+p_2+q_2}((E')^{p_1}\times(E'')^{p_2},\ (E')^{p_1}\times(E'')^{p_2-1}\cup(E')^{p_1-1}\times(E'')^{p_2})$$
$$\cong H^{p_1+q_1+p_2+q_2}((E'\times E'')^{p_1+p_2},$$
$$(E'\times(E'')^{p_2-1}\cup(E')^{p_1-1}\times E'')\cap(E'\times E'')^{p_1+p_2})$$

である．ここで，$(E'\times E'')^{p_1+p_2-1}$ よりも大きい空間を modulo にした $(E'\times E'')^{p_1+p_2}$ のコホモロジー群を得るから，これは自然に次のもの

$$H^{p_1+q_1+p_2+q_2}((E'\times E'')^{p_1+p_2},(E'\times E'')^{p_1+p_2-1})\cong E_1^{p_1+p_2,q_1+q_2}$$

に写される．この群における $\alpha_1\otimes\alpha_2$ の像も $\alpha_1\otimes\alpha_2$ と表わすことにする．このとき，容易に確かめることができるように，次が成り立つ：

$$d_1^{p_1+p_2,q_1+q_2}(\alpha_1\otimes\alpha_2)={}'d_1^{p_1,q_1}\alpha_1\otimes\alpha_2+(-1)^{p_2+q_2}\alpha_1\otimes{}''d_1^{p_2,q_2}\alpha_2$$

この公式により，積 ${}'E_1^{p_1,q_1}\otimes{}''E_1^{p_2,q_2}\to E_1^{p_1+p_2,q_1+q_2}$ は積 ${}'E_2^{p_1,q_1}\otimes{}''E_2^{p_2,q_2}\to E_2^{p_1+p_2,q_1+q_2}$ を定義し，これは順次，E_3 におけるもの，E_4 におけるものなどを定義する．このように，積は各 r,p_1,q_1,p_2,q_2 について，任意の元の対 $\alpha_1\in{}'E_r^{p_1,q_1}$, $\alpha_2\in{}''E_r^{p_2,q_2}$ にある元 $\alpha_1\otimes\alpha_2\in E_r^{p_1+p_2,q_1+q_2}$ を対応させて定義される．

最後に，ファイバー空間の対角写像

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Delta} & E\times E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p\times p} \\ B & \xrightarrow{\Delta} & B\times B \end{array}$$

を適用し，$\alpha_1\in E_r^{p_1,q_1}$ と $\alpha_2\in E_r^{p_2,q_2}$ の積として，元 $\alpha_1\alpha_2=\Delta^*(\alpha_1\otimes\alpha_2)$ を選ぶことにより，単一のファイバー空間のスペクトル系列の積を定義する．ただし，Δ^* はファイバー空間の対角写像 Δ により誘導されたスペクトル系列の準

同型である．

この節で上に列挙した積の性質すべてを確かめるのは，価値はあるが，骨の折れる仕事だという警告をして読者に任せたい．

積構造の用法の良い例を見てみよう．

特殊ユニタリー群 $SU(n)$ のコホモロジー群の計算はまだ終わっていない．$n=2,3,4$ のとき，$SU(n)$ の整係数ホモロジーはすでに次のように得られている：

$$H_*(SU(n))\cong H_*(S^3\times S^5\times\cdots\times S^{2n-1})$$

したがって，$U(n)=S^1\times SU(n)$ により，

$$H_*(U(n))\cong H_*(S^1\times S^3\times\cdots\times S^{2n-1}),\quad n=1,2,3,4$$

を得る．

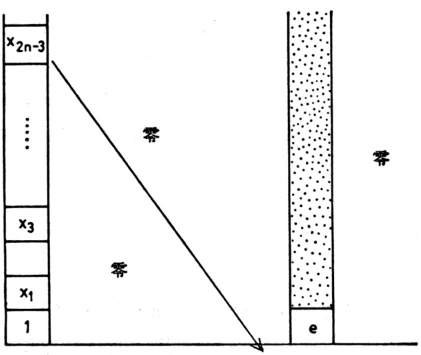
同様な同型は，各 n について，ホモロジーもコホモロジーも同様に成り立つことを示そう．コホモロジーにおいては，同型は環同型

$$H^*(U(n))\cong\Lambda(x_1,x_3,x_5,\cdots,x_{2n-1}),\quad \deg x_i=i$$

を意味する．ただし，右辺は $\{x_i\}$ により生成される外積代数である．$SU(5)$ において経験した難しさが，いつどのように克服されるか以下で明らかになるであろう．

$n=2$ ならば，定理は証明されている．任意の $k\leq n-1$ について定理は正しい，すなわち

$$H^*(U(n-1))\cong\Lambda(x_1,x_3,\cdots,x_{2n-3})$$



が成り立つと仮定する．ファイバー空間 $U(n)\xrightarrow{U(n-1)}S^{2n-1}$ を考えると，そのコホモロジー・スペクトル系列の E_2 項は前ページのように図示される．

議論を先へ進められなかった理由は，単に次元の関係だけでは自明であることがわからない微分に出会ったことである．第2の試みにより，「疑わしい」微分は，多元環 $\Lambda(x_1, x_3, \cdots, x_{2n-3})$ の生成元の1つではなくて，これらの生成元の積で表わされた元を含む場所から作用していることがわかる．生成元のみを考えるならば，考えている微分はすべて幸いに，危険な場所 $E_2^{2n-1,0}$ の下を通ることがわかり，したがって，すべて自明である．したがって，積で表わされた元の微分は自明になり，すべての微分は自明である，すなわち，$E_2=E_\infty$ を得たことになる．したがって，

$$E_\infty\cong H^*(S^{2n-1}; H^*(U(n-1)))\cong H^*(S^{2n-1})\otimes H^*(U(n-1))$$

ただし，等式は環同型，すなわち

$$\mathscr{G}(H^*(U(n))\cong H^*(S^{2n-1})\otimes H^*(U(n-1))$$

を意味する．

各対角線 $p+q=$一定 は高々2つの自明でない(自由な)群をもち，したがって，$E_\infty^{n_2,q-n_2}\cong H^q(U(n))/^{(n_1)}H^q(U(n))$，$n_1>n_2$ である．

自由な群ばかりであるから，対角線 $p+q=$一定の上で直和をとって $H^*(U(n))$ を得る．すなわち，加群としての同型

$$H^*(U(n))\cong\Lambda(x_1, x_3, \cdots, x_{2n-1})\cong H^*(S^{2n-1}\times U(n-1))$$

が得られる．

実は，これは各対角線上で，第2列にある群 $^{(n_1)}H^q(U(n))$ による商群への分解をもつから，環同型でもある．さて，第2列全体は生成元 $e=x_{2n-1}$ をテンソル積して第1列から得られる，すなわち，積の元のみから成り立っている．環同型 $E_\infty\cong H^*(U(n))$ は§18の同伴環に関する注意からわかる．

演習　複素 Stiefel 多様体と四元数 Stiefel 多様体のコホモロジー環を決定せよ．

射影空間のコホモロジー環

(1) $H^*(CP^n)$

ファイバーが円 S^1 であるファイバー空間 $\pi: S^{2n+1}\to CP^n$（$\Leftrightarrow$射影 π は各点 $(z_0, \cdots, z_n)\in S^{2n+1}$ に点 $(z_0:\cdots:z_n)\in CP^n$ を対応）を考える．CP^n は単連

結なので，このファイバー空間のスペクトル系列の E_2 項は次の形である：

	零				
1	CP^n のコホモロジー	0	0	0	
0	CP^n のコホモロジー	0	0	0	
	0　1 ………………… $2n$				

次元を考慮すると，次が成り立つ：

$$E_3=E_4=\cdots=E_\infty\cong H^*(S^{2n+1})$$

したがって，(0,0) と $(2n,1)$ 以外のすべての (p,q) について $E_3^{p,q}=0$ であり，$E_3^{2n,1}\cong \boldsymbol{Z}$ である．この結果として，$E_2^{1,0}=0$, $E_2^{2n,1}\cong \boldsymbol{Z}$ かつ $k=0,1,\cdots,2n-1$ ならば $d_2^{k,1}:E_2^{k,1}\to E_2^{k+2,0}$ は同型である．さて，$E_2^{k,0}\cong E_2^{k,1}$，したがって $k=0$, $2,\cdots,2n$ について $E_2^{k,0}\cong E_2^{k,1}\cong \boldsymbol{Z}$ であり，残る $E_2^{k,0}$ は自明である．したがって，$k=0,2,\cdots,2n$ について $H^k(\boldsymbol{CP}^n)\cong \boldsymbol{Z}$ であり，すでにわかっているように，それ以外の k については $H^k(\boldsymbol{CP}^n)=0$ である．このとき E_2 項は次の通りである：

e_0e	0	e_1e	0	e_2e	0	…	…	0	e_ne	0
e_0	0	e_1	0	e_2	0	…	…	0	e_n	0
0	1	2	3	4	5	…………		$2n-1$	$2n$	

ただし，$e_i\in H^{2i}(\boldsymbol{CP}^n)$, $e\in H^1(S^1)$ は生成元であり，これらは $d_2^{2k,1}(e_ke)=e_{k+1}$ ($d_2^{2k,1}$ は同型！) となるように選んでよい．このとき，$e_{k+1}=d_2^{2k,1}(e_ke)=e_kd_2^{0,1}e$ $=e_ke_1$，したがって，$k=1,2,\cdots,n$ について $e_k=e_1^k$ である．これで次を得たことになる．

$$H^*(\boldsymbol{CP}^n)\cong \boldsymbol{Z}[e_1]/\{e_1^{n+1}\},\ \deg e_1=2$$

同様に，任意の環 A について同じことが成り立つ：$H^*(\boldsymbol{CP}^n;A)\cong A[e_1]/\{e_1^{n+1}\}$．無限次元射影空間 $\boldsymbol{CP}^\infty$ については $H^*(\boldsymbol{CP}^\infty;A)\cong A[e_1]$ が成り立ち，特に $H^*(\boldsymbol{CP}^\infty)\cong \boldsymbol{Z}[e_1]$ である．

(2) $H^*(\boldsymbol{RP}^n)$

加法構造はすでにわかっている：n が偶数ならば，

$$H^q(\boldsymbol{RP}^n)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & q=0 \quad \text{のとき}\\ \boldsymbol{Z}_2 & q=2,4,\cdots,n \quad \text{のとき}\\ 0 & \text{その他の } q \text{ について}\end{cases}$$

n が奇数ならば,

$$H^q(\boldsymbol{R}P^n)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & q=0,\ n \quad \text{のとき}\\ \boldsymbol{Z}_2 & q=2,4,\cdots,n-1 \ \text{のとき}\\ 0 & \text{その他の}\ q\ \text{について}\end{cases}$$

n が奇数 $(n=2k+1)$ のとき $\boldsymbol{R}P^n$ の積は写像 $\pi_k:\boldsymbol{R}P^{2k+1}\to\boldsymbol{C}P^n$ から定義される．（上で考えた写像 $\pi:S^{2k+1}\to\boldsymbol{C}P^k$ は直径上の対称点を同じ点に写す．したがって，これは合成 $S^{2k+1}\to\boldsymbol{R}P^{2k+1}\xrightarrow{\pi_k}\boldsymbol{C}P^k$ として書ける.）これは,（$\boldsymbol{C}P^k$ と $\boldsymbol{R}P^{2k+1}$ の胞体構造から容易に確かめられるように）$q=2,4,\cdots,2k$ について全射準同型

$$\pi_k^*:\boldsymbol{Z}\cong H^q(\boldsymbol{C}P^k)\to H^q(\boldsymbol{R}P^{2k+1})\cong\boldsymbol{Z}_2$$

を誘導する．したがって，生成元 $\bar{e}_i\in H^{2i}(\boldsymbol{R}P^{2k+1})$ の間に，$k'\leq k$ ならば $\bar{e}_1^{k'}=\bar{e}_{k'}$ という関係式がある．したがって,

$$H^*(\boldsymbol{R}P^{2k+1})\cong\boldsymbol{Z}_2[\bar{e}_1]/\{\bar{e}_1^k\}\otimes\Lambda(f)$$

ただし，$f\in H^{2k+1}(\boldsymbol{R}P^{2k+1})$ は標準的生成元である．射入 $\boldsymbol{R}P^{2k}\subset\boldsymbol{R}P^{2k+1}$ は明らかに，$2k$ までのすべての次元のコホモロジー群の同型を誘導するから,

$$H^*(\boldsymbol{R}P^{2k})\cong\boldsymbol{Z}_2[\bar{e}_1]/\{\bar{e}_1^{k+1}\}$$

である．無限次元射影空間 $\boldsymbol{R}P^\infty$ については,

$$H^*(\boldsymbol{R}P^\infty)\cong\boldsymbol{Z}_2[\bar{e}_1]$$

(3) $H^*(\boldsymbol{R}P^n\,;\boldsymbol{Z}_2)$

ここでも，加法構造はわかっている：

$$H^q(\boldsymbol{R}P^n\,;\boldsymbol{Z}_2)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z}_2 & q\leq n \ \text{のとき}\\ 0 & q>n \ \text{のとき}\end{cases}$$

乗法構造については，明らかにファイバーとして円 S^1 をもつファイバー空間である写像 $\pi_k:\boldsymbol{R}P^{2k+1}\to\boldsymbol{C}P^k$ を調べる．この mod 2 コホモロジー・スペクトル系列の E_2 項は，次の形である：

零

ε	0	$\varepsilon\varepsilon_1$	0	$\varepsilon\varepsilon_1^2$	0	$\cdots$	$\cdots$	0	$\varepsilon\varepsilon_1^k$	0	
1	0	ε_1	0	ε_1^2	0	$\cdots$	$\cdots$	0	ε_1^k	0	

0　1　2　3　4　…………………$2k-1$　$2k$

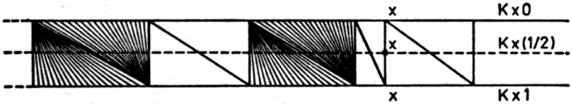
これより，群構造 $H^q(\boldsymbol{R}P^n\,;\boldsymbol{Z}_2)$ を考慮して，この系列のすべての微分は自

明，よって $E_2=E_\infty$ であると結論できる．したがって，$H^i(\boldsymbol{RP}^n;\boldsymbol{Z}_2)$ の生成元 α_i の間に $\alpha_2^s=\alpha_{2s}$ かつ $\alpha_1\alpha_{2s}=\alpha_{2s+1}$ という関係式がある．ここで α_1^2 は何に等しいのかという問題が1つ残るが，これについては今のところ答えられない．これには2つの可能性がある：$\alpha_s=\alpha_1^s$ を意味する $\alpha_1^2=\alpha_2$ か，または $\alpha_1^2=0$ である．しかしスペクトル系列だけでは答は出て来ない．実は，$\alpha_1^2=\alpha_2$ であるが，これはある特別な考察により証明しなければならない．必要な準備ができていれば，微分位相幾何学の概念（Poincaré 双対性，輪体のまつわり）を適用できて，簡単な証明があるのだが，本書では現在のところ，コホモロジーの積の元の定義にむしろ戻るしかない．

K は順序の付いた頂点 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ をもつ有限単体複体とし，$c_1\in\mathscr{C}^p(K;A)$，$c_2\in\mathscr{C}^q(K;A)$ は双対鎖，すなわち，環 A に値をもつ K のそれぞれ p 次元，q 次元単体とする．これらの積 $c_1c_2\in\mathscr{C}^{p+q}(K;A)$ は等式

$$c_1c_2(a_{i_0},\cdots,a_{i_{p+q}})=c_1(a_{i_0},\cdots,a_{i_p})c_2(a_{i_{p+1}},\cdots,a_{i_{p+q}})$$

で定義される．ただし，$(a_{i_0},a_{i_1},\cdots a_{i_m})$ は頂点 $a_{i_0},\cdots,a_{i_m}$ をもつ単体である．c_1 と c_2 がコホモロジー類 γ_1 と γ_2 を表わす双対輪体ならば，c_1c_2 はコホモロジー類 $\gamma_1\gamma_2$ を表わす双対輪体である．実際，定義により $\gamma_1\gamma_2=\Delta^*(\gamma_1\otimes\gamma_2)$，ただし $\Delta:K\to K\times K$ は対角写像，であり，$\gamma_1\otimes\gamma_2$ は $\sigma\times\tau$ の上で，$\dim\sigma=p$ かつ $\dim\tau=q$ ならば値 $c_1(\sigma)c_2(\tau)$ をとり，それ以外では0である双対輪体 $c_1\otimes c_2$ の類である．（$K\times K$ は CW 複体であるが単体複体でないことに注意して）写像 Δ の胞体近似を次に構成する．積 $K\times[0,1]$ をとり，通常の通り（積 $(a_{i_0},\cdots,a_{i_m})\times[0,1]$ は頂点 $(a_{i_0}\times0,\cdots,a_{i_k}\times0,a_{i_k}\times1,\cdots,a_{i_m}\times1)$, $k=0,1,\cdots,m$, をもつ $(m+1)$ 個の $(m+1)$ 次元単体に分割して）これを分割する．各単体で，2つの向かい合う面 $(a_{i_0}\times0,\cdots,a_{i_k}\times0)$ と $(a_{i_k}\times1,\cdots,a_{i_m}\times1)$ を選ぶ．1つの線分の点と他の線分の点を結ぶ線分は互いに交わらず単体全体を覆うものとする．$K\times I$ のすべての単体においてこれらの線分を考えると，これらは複体全体を



覆う．$x\in K$ とし，点 $(x,1/2)$ を通る線分を考え，その端点を $(\varphi_0(x),0)$ および $(\varphi_1(x),1)$ と表わす．写像 $\tilde{\Delta}:K\to K\times K\Longleftrightarrow\tilde{\Delta}(\lambda)=(\varphi_0(x),\varphi_1(x))$

は，対角的な埋込みの近似であり，胞体的である．($x\in\sigma$ ならば，$\tilde{\Delta}(x)\in\sigma\times\sigma$ であり，これは線分で $\Delta(x)$ と結ぶことができるという事実からホモトピーは構成できる．)さらに，$\tilde{\Delta}$ は単体 $(a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_m})\subset K$ を次の積

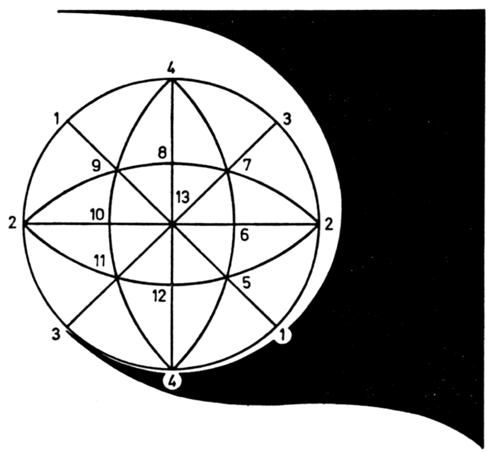
$$(a_{i_0})\times(a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m})$$
$$(a_{i_0}, a_{i_1})\times(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m})$$
$$(a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2})\times(a_{i_2}, \cdots, a_{i_m})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_{i_0}, a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m})\times(a_{i_m})$$

の和集合の上に同相に向きを保って写す．ここで積 $\gamma_1\gamma_2$ は双対輪体 $\tilde{\Delta}^*(c_1\otimes c_2)$ のコホモロジー類である．このとき

$$[\tilde{\Delta}^*(c_1\otimes c_2)](a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_{p+q}})=(c_1\otimes c_2)(\tilde{\Delta}(a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_{p+q}}))$$
$$=\sum_{k=0}^{p+q}(c_1\otimes c_2)((a_{i_0}, \cdots, a_{i_k})\times(a_{i_k}, \cdots, a_{i_{p+q}}))$$
$$=c_1(a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_p})c_2(a_{i_p}, \cdots, a_{i_{p+q}})=c_1c_2(a_{i_0}, \cdots, a_{i_{p+q}})$$

したがって，$\tilde{\Delta}^*(c_1\otimes c_2)=c_1c_2$，すなわち，双対輪体 c_1c_2 は類 $\gamma_1\gamma_2$ に属する．これが証明すべきものであった．

さて，$H^*(\boldsymbol{RP}^n)$ を考えよう．(各 n について埋込み $\boldsymbol{RP}^2\subset\boldsymbol{RP}^n$ があり，これは次元 1 と 2 のコホモロジー群の同型を誘導するから) $n=2$ の場合を調べれ





ば十分である．射影平面は13個の頂点をもつ24個の単体に分割できる．単体12, 14, 15, 19, 23, 25, 26, 27 に $1\in \boldsymbol{Z}_2$，残りに $0\in \boldsymbol{Z}_2$ を対応させる1次元双対鎖 a は零コホモローグでない双対輪体である．（この双対輪体の，零ホモローグでない輪体 12＋23＋34＋41 とのスカラー積は1に等しい．）

演習　これを確かめよ．

このとき，次が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&a^2(1\ 2\ 5)=a(1\ 2)a(2\ 5)=1 && a^2(4\ 5\ 12)=a(4\ 5)a(5\ 12)=0\\
&a^2(1\ 2\ 9)=a(1\ 2)a(2\ 9)=0 && a^2(4\ 7\ 8)=a(4\ 7)a(7\ 8)=0\\
&a^2(1\ 4\ 5)=a(1\ 4)a(4\ 5)=0 && a^2(4\ 8\ 9)=a(4\ 8)a(8\ 9)=0\\
&a^2(1\ 4\ 9)=a(1\ 4)a(4\ 9)=0 && a^2(4\ 11\ 12)=a(4\ 11)a(11\ 12)=0\\
&a^2(2\ 3\ 7)=a(2\ 3)a(3\ 7)=0 && a^2(5\ 6\ 13)=a(5\ 6)a(6\ 13)=0\\
&a^2(2\ 3\ 11)=a(2\ 3)a(3\ 11)=0 && a^2(5\ 12\ 13)=a(5\ 12)a(12\ 13)=0\\
&a^2(2\ 5\ 6)=a(2\ 5)a(5\ 6)=0 && a^2(6\ 7\ 13)=a(6\ 7)a(7\ 13)=0\\
&a^2(2\ 6\ 7)=a(2\ 6)a(6\ 7)=0 && a^2(7\ 8\ 13)=a(7\ 8)a(8\ 13)=0\\
&a^2(2\ 9\ 10)=a(2\ 9)a(9\ 10)=0 && a^2(8\ 9\ 13)=a(8\ 9)a(9\ 13)=0\\
&a^2(2\ 10\ 11)=a(2\ 10)a(10\ 11)=0 && a^2(9\ 10\ 13)=a(9\ 10)a(10\ 13)=0\\
&a^2(3\ 4\ 7)=a(3\ 4)a(4\ 7)=0 && a^2(10\ 11\ 13)=a(10\ 11)a(11\ 13)=0\\
&a^2(3\ 4\ 11)=a(3\ 4)a(4\ 11)=0 && a^2(11\ 12\ 13)=a(11\ 12)a(12\ 13)=0
\end{aligned}
$$

ここで $(m\ n)$ と $(m\ n\ p)$ は，それぞれ添字 m, n と m, n, p の頂点をもつ単体を表わす．したがって，群 $H_2(\boldsymbol{RP}^2\,;\boldsymbol{Z}_2)$ の生成元上でとる a^2 の値は $1\in \boldsymbol{Z}_2$ に等しい．（この生成元はすべての単体の和で代表される．）したがって，$a^2\not\sim 0$ である．

これで，$\boldsymbol{RP}^n$ の mod 2 コホモロジーにおいて，生成元の平方は2次元の生成元で，各 n について

$$H^*(\boldsymbol{RP}^n\,;\boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[\alpha_1]/\{\alpha_1^{n+1}\}$$

であることが示されたことになる．無限次元射影空間 $\boldsymbol{RP}^\infty$ については，

$$H^*(\boldsymbol{RP}^\infty\,;\boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[\alpha_1]$$

§23. キリング空間（n 連結ファイバー空間）

さて，位相空間のホモトピー群の計算法を考えてみよう．

位相空間 X が与えられているとき，われわれの目的は $H^*(X)$ がわかってい

ると仮定してホモトピー群 $\pi_i(X)$ を求めることである．われわれの関心があるのは，主として $\pi_1(X)=0$ の場合である．$i<n$ について $\pi_i(X)=0$ ならば，Hurewicz の定理により $\pi_n(X)\cong H_n(X)$ である．その他のホモトピー群を決定するには，巧妙な幾何学的方法を用いる．X の整係数コホモロジー群がわかれば，任意の可換群 π に係数をもつコホモロジー群がわかる．$\pi=\pi_n(X)=H_n(X)$ として，次の写像

$$f:X\to K(\pi,n)=K(\pi_n(X),n)$$

を構成しよう．1つの方法は，$\pi_{n+1}(X)$ から始めてホモトピー群を「張り合わせる」ことである．すなわち，§10 の胞体接着定理により，X が $K(\pi,n)$ 型の空間の部分空間であるとしても群 $\pi_n(X)$ は変わらない．さらにもう1つの方法がある．すなわち，$H^n(X;\pi)\cong[X,K(\pi,n)]$ であるから，$H^n(X;\pi_n(X))$ の基本類 e は矛盾なく定義された写像 $f:X\to K(\pi,n)$ を与える．いずれの方法も，$\pi_n(X)$ と $\pi_n(K(\pi,n))\cong\pi_n(X)$ との間の同型を誘導する X から $K(\pi,n)$ へのある写像を与える．

さて，任意の写像 $X\to K(\pi_n(X),n)$ はホモトピー同値なファイバー空間で置き換えられることはわかっている．このとき，ファイバーを $X|_n$ と表わし，X の**キリング空間**（**n 連結ファイバー空間**）とよぶ．実は，この変形にすぎないが，さらにもう1つの方法がある．次の Serre ファイバー空間

$$*\simeq E\xrightarrow{\Omega K(\pi,n)}K(\pi,n)$$

を考える．明らかに，$\Omega K(\pi,n)=K(\pi,n-1)$ である．次に，このファイバー空間から $f:X\to K(\pi,n)$ により誘導されたファイバー空間を X 上に構成する：

$$\begin{array}{ccc}\tilde{X}|_n & \xrightarrow{\tilde{f}} & E\simeq *\\ {\scriptstyle K(\pi_n(X),n-1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K(\pi_n(X),n-1)}\\ X & \xrightarrow{f} & K(\pi_n(X),n)\end{array}$$

誘導されたファイバー空間の全空間 $\tilde{X}|_n$ は $X|_n$ と同じホモトピー型をもつことがわかる．実際，すでに見てきたように，f がファイバー空間ならば，$\tilde{f}$ も同じファイバーをもつファイバー空間である．さて，$E\simeq *$ であるから，このファイバー空間 f のファイバーは $\tilde{X}|_n$ のホモトピー型をもたねばならない．したがって，$\tilde{X}|_n\simeq X|_n$ である．

さて，残っているのは $X|_n$ のホモトピー群を計算することである．このた

めに次のファイバー空間

$$f : X \xrightarrow{X|_n} K(\pi_n(X), n)$$

を考える.（以下，誤解がなければ，$K(\pi, n)$ の代わりに記号 K_n をしばしば用いる.）このファイバー空間のホモトピー完全系列は

$$\cdots \to \pi_i(K_n) \to \pi_{i-1}(X|_n) \to \pi_{i-1}(X) \to \pi_{i-1}(K_n) \to \cdots$$

である．$i \neq n$ かつ $i \neq n+1$ とすると，$\pi_i(K_n) \cong \pi_{i-1}(K_n) = 0$，であり，よって，$\pi_{i-1}(X|_n) \cong \pi_{i-1}(X)$ である．したがって，$k \neq n$, $n-1$ について $\pi_k(X|_n) \cong \pi_k(X)$，すなわち，完全系列は

$$0 \to \pi_n(X|_n) \to \pi_n(X) \xrightarrow{\alpha} \pi_n(K_n) \to \pi_{n-1}(X|_n) \to \pi_{n-1}(X) = 0$$

となる．ここで準同型 α を考えよう．写像 $f : X \to K_n$ は n 次ホモトピー群の同型を誘導する．すなわち，$\alpha = f_*$ は同型であることを思いおこそう．このとき $\pi_{n-1}(X|_n) = \pi_n(X|_n) = 0$ である．したがって

$$\pi_i(X|_n) \cong \begin{cases} 0 & i \leq n \quad \text{のとき} \\ \pi_i(X) & i \geq n+1 \quad \text{のとき} \end{cases}$$

これで，空間 X の最初の自明でないホモトピー群は消去（キル）された．$K(\pi, n)$ のコホモロジーはわかっていると仮定する．このとき，上のファイバー空間のうちのいずれかのスペクトル系列を用いてコホモロジー $H^*(X|_n)$，ついで $H_*(X|_n)$ を求めることができる．このとき Hurewicz の定理により，$\pi_{n+1}(X) \cong \pi_{n+1}(X|_n) \cong H_{n+1}(X|_n)$ である．さらに，今度は X の代わりに $X|_n$ に同じ操作を繰り返して，新しいキリング空間 $X|_{n+1}$ が得られる．以下，これを繰り返す.

これは，一度 $K(\pi, n)$ のコホモロジーがわかれば，任意の位相空間 X のホモトピー群が計算できることを意味する．（この方法がどの程度まで実行可能かはまもなく明らかになるであろう.）

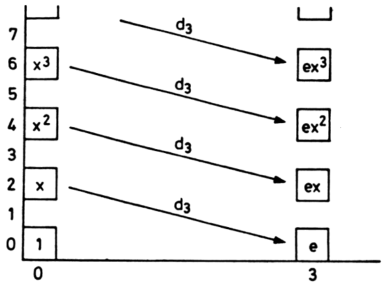
さて，次の初等的な問題により，キリング空間の方法を解説しよう．すなわち，$\pi_4(S^3)$ を計算する．データは

$$X = S^3 \ ; \ \pi_1(X) = \pi_2(X) = 0, \ \ \pi_3(X) \cong \boldsymbol{Z} \ ;$$

$$X|_3 \xrightarrow{K(\boldsymbol{Z},2)} X \ ; \ K(\pi_n(X) \ ; \ n-1) = K(\boldsymbol{Z}, 2), n = 3$$

であり，すでにわかっているように，$K(\boldsymbol{Z}, 2) = \boldsymbol{CP}^\infty$，すなわち $X|_3 \xrightarrow{\boldsymbol{CP}^\infty} S^3$ は

ファイバー空間である．CP^∞ のコホモロジーはよくわかっており，$H^*(CP^\infty) \cong \boldsymbol{Z}[x]$（唯 1 つの生成元 x をもつ $\boldsymbol{Z}$ 上の多項式環）である．ただし $\deg x=2$. このスペクトル系列を調べよう．E_2 項は次の図



で与えられる．まず $d_2=0$ すなわち $E_2=E_3$ であり，かつ，すべての $k>3$ について $d_k=0$, すなわち $E_4=E_5=\cdots=E_\infty$ である．さて，$d_3(x) \in H^3(S^3)$ であるが，像 $d_3(x)$ は何に等しいのであろうか？　明らかに $d_3(x)=\pm e$ である．実際，$d_3(x)=ke$ と仮定する．ただし，$k \in \boldsymbol{Z}$ であり，必ずしも零と異なるとは限らない．このとき，各 $k \neq \pm 1$ については，E_∞ において対角線 $p+q=2$ と $p+q=3$ の少なくとも 1 つの上に自明でないある群が残る．したがって，この群の少なくとも 1 つは零とは異なる．これは，$H^2(X|_3)$ または $H^3(X|_3)$ が零と異なることを意味し，これは $i \leq 3$ について $\pi_i(X|_3)=0$ に矛盾する．したがって $d_3(x)=\pm e$ であり，（$\deg x$ は偶数であるから普通の微分と同じ法則により d_3 は作用して）$d_3(x^k)=kx^{k-1}d_3(x)=\pm kx^{k-1}e$, すなわち $E_\infty^{3,2k} \cong \boldsymbol{Z}_{k+1}$ であり，特に $E_\infty^{3,2} \cong \boldsymbol{Z}_2$ である．$E_\infty^{3,2k}$ は奇数の対角線 $2k+3=p+q$ 上にあり，$E_\infty^{0,2k}$ は偶数の対角線上にあるから，E_∞ では各対角線上に高々 1 つの自明でない群がある．したがって，自明でない同伴性は起こらなくて，$H^*(X|_3) \cong E_\infty$ である．特に，$H^5(X|_3) \cong E_\infty^{3,2} \cong \boldsymbol{Z}_2$, すなわち $H_4(X|_3) \cong \boldsymbol{Z}_2$ であり，したがって，$\pi_4(S^3|_3) \cong \pi_4(S^3) \cong \boldsymbol{Z}_2$ である．これと Freudenthal の定理により $n \geq 3$ について $\pi_{n+1}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_2$ であることがわかる．

§24. ホモトピー群の階数

前節でみたように，ホモトピー群を計算するには，まず最初に空間 $K(\pi, n)$

のコホモロジーを知らなければならない．この計算は容易とは言い難いことがわかる．しかし，これらの空間の有理数 $\boldsymbol{Q}$ に係数をもつコホモロジーを計算するのは比較的容易である．明らかに，この情報はわれわれの要求を満たしはしないが，少なくとも何かを与えている．すなわち，これは空間 X のホモトピー群の階数，すなわち，群 $\pi_i(X)\otimes\boldsymbol{Q}$ を求めるのに役立つ．

そこで π は有限個の生成元をもつ群とし，$H^*(K(\pi,n);\boldsymbol{Q})$ を計算しよう．$K(\pi_1\oplus\pi_2,n)=K(\pi_1,n)\times K(\pi_2,n)$ であるから，π が有限巡回群または $\pi=\boldsymbol{Z}$ の場合に $H^*(K(\pi,n);\boldsymbol{Q})$ を計算すれば十分である．

定理　(1) π が有限群ならば，各 i，$n>0$ について $H^i(K(\pi,n);\boldsymbol{Q})=0$ である．

(2) n が奇数ならば，$i=0$ かつ $i=n$ について $H^i(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Q}$，他のすべての i について $H^i(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Q})=0$ である．そして，コホモロジー環において，生成元 $e_n\in H^n(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Q})$ の平方は零，すなわち $H^*(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Q})\cong\Lambda_{\boldsymbol{Q}}(e_n)$（唯1つの生成元 e_n をもつ外積代数）である．

(3) n が偶数ならば，$i=kn$，$k=0,1,2,\cdots$ について $H^i(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Q}$，他のすべての i について $H^i(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Q})=0$ である．そして生成元 $e_n\in H^n(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Q})$ の k 巾 e_n^k は $H^{kn}(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Q})$ の生成元，すなわち $H^*(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Q}[e_n]$（唯1つの生成元 e_n をもつ $\boldsymbol{Q}$ 上の多項式環）である．

証明　まず最初に，1つの補題を証明しよう．

補題　$K(\pi,n)$ 型の任意の2つの空間は弱ホモトピー同値である．

実際，X と Y は2つの $K(\pi,n)$ 空間とし，Y は任意，X は§10で構成した特別なものであると仮定する．（すなわち，X は1つの頂点をもち，1から $n-1$ までの次元の胞体をもたない CW 複体であり，n 次元と $(n+1)$ 次元胞体は，それぞれ π の生成元および生成元の間の関係式と一対一に対応していることを思いおこそう．）さて，ホモトピー群の同型を誘導する写像 $f:X\to Y$ を構成する．これは，X と Y が弱ホモトピー同値であること，したがって任意の2つの $K(\pi,n)$ 型の空間は弱ホモトピー同値であることを意味するから，われわれがまさに求めているものである．X の n 切片上の写像 f は次のように定義される．X の各 n 次元胞体は $\pi=\pi_n(Y)$ の生成元であるが，このような胞体の閉包は n 次元球面である．まず X の頂点は Y の基点に写され，各球面 $\bar{\sigma}_i^n\subset X$ は類 $\sigma_i^n\in\pi=\pi_n(Y)$ を表わす写像 $S^n\to Y$ により写されるとする．これ

で，X の n 切片上に写像 f があることになる．$(n+1)$ 切片への拡張に対する障害は $\mathscr{C}^{n+1}(X;\pi_n(Y))$ にある．これは胞体 $\sigma^{n+1}\subset X$ に，f の $\partial\sigma^{n+1}$ への制限として与えられる $\pi_n(Y)$ の元を対応させる．さて X における σ^{n+1} の境界は $\sum_i a_i\sigma_i^n$ であり，(胞体 σ^{n+1} をこの複体に接着させた関係式そのものとして) 元 $\sum_i a_i\sigma_i^n$ は π において零である．したがって，f の $\partial\sigma^{n+1}$ への制限は $\pi_n(Y)=\pi$ における零元を定義し，写像は $(n+1)$ 切片に拡張される．それより上の切片の拡張は自明な群 ($i>n$ について $\pi_i(Y)=0$) にのみ障害をもつから，可能である．したがって，(構成により) $\pi_n(X)$ と $\pi_n(Y)$ との間および (自明な群であるから) $i\neq n$ について $\pi_i(X)$ と $\pi_i(Y)$ の間の同型を誘導する写像 $f:X\to Y$ を得たことになるので，補題は証明された．

この補題から，与えられた π と n について任意の $K(\pi,n)$ 空間のコホモロジー環は同型であることがわかる．したがって，定理の証明の過程で任意の特別な方法により $K(\pi,n)$ を構成してよい．(例えば，$K(\pi,n)=\Omega K(\pi,n+1)$ と仮定してよい．)

さて定理に戻ろう．$n=1$ については定理は正しい．実際，$K(\boldsymbol{Z},1)$ として円 S^1 を選んでよいので，次を得る：

$$H^i(K(\boldsymbol{Z},1)\,;\,\boldsymbol{Q})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Q} & i=0,1\text{ のとき}\\ 0 & i>1\text{ のとき}\end{cases}$$

$K(\boldsymbol{Z}_m,1)$ としては，無限次元球面 S^∞ への群 $\boldsymbol{Z}_m$ の作用による軌道(商)空間として得られる無限次元レンズ空間 L_m をとってよい．(ここで，群 $\boldsymbol{Z}_m$ の生成元は点 $(z_1,z_2,\cdots)\in S^\infty=\{(z_1,z_2,\cdots)\,|\,|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots=1$，かつ，ある k から以後は $z_k=0\}$ に点$(e^{\frac{2\pi i}{m}}z_1, e^{\frac{2\pi i}{m}}z_2,\cdots)$ を対応させる．)実際，ファイバー $\boldsymbol{Z}_m$ をもつ自然な被覆 $p:S^\infty\to L_m$ が存在し，したがって $\pi_1(L_m)\cong\boldsymbol{Z}_m$ かつ $i>1$ について $\pi_i(L_m)=0$ である．L_m の整係数ホモロジーを計算しよう．まず最初に，L_m の胞体分割を求めよう．球面 S^∞ は各次元に m 個の胞体をもつ特別な胞体分割をもつ．すなわち，これらは $z_{k+2}=z_{k+3}=\cdots=0$，$z_{k+1}=\rho e^{i\varphi}$，ただし $\rho>0, \varphi=\dfrac{2\pi j}{m}$ を満たすすべての点 $(z_1,z_2,\cdots)$ の集合を表わす σ_j^{2k} $(j=0,1,\cdots,m-1)$ および，$z_{k+2}=z_{k+3}=\cdots=0$，$z_{k+1}=\rho e^{i\varphi}$，ただし $\rho>0$，$\dfrac{2\pi j}{m}<\varphi<\dfrac{2\pi(j+1)}{m}$，を満たすすべての点 $(z_1,z_2,\cdots)$ の集合を表わす σ_j^{2k+1} $(j=0,1,\cdots,m-1)$ である．幾何学的解釈は次の通りである．胞体 σ_0^{2k} は，単に標準的に埋め込まれた

球面 $S^{2k}\subset S^{\infty}$ の上半球面である．$\boldsymbol{Z}_m$ の変換はこの半球面を順に次の半球面に写し，底 S^{2k-1} をそれ自身に写す．結果として，共通点をもつ m 個の $2k$ 次元半球面を得，これは球面 S^{2k+1} を m 個の部分に分割する．これらはそれぞれ胞体 σ_j^{2k} と σ_j^{2k+1} である．(胞体の向きが適当に選ばれているならば)明らかに $\partial\sigma_j^{2k}=\sigma_0^{2k-1}+\cdots+\sigma_{m-1}^{2k-1}$ (各胞体 σ_j^{2k} の境界はこれらに共通な底 S^{2k-1} であり，それ自身 m 個の胞体に分割されている）であり，$\partial\sigma_j^{2k+1}=\sigma_{j+1}^{2k}-\sigma_j^{2k}$ である．

$\boldsymbol{Z}_m$ の変換は胞体を互いに同相に写す．商空間へ射影された後，すべての胞体 $\sigma_j^{2k}(j=0,\cdots,m-1)$ と $\sigma_j^{2k+1}(j=0,1,\cdots,m-1)$ はそれぞれ互いに同一視される．したがって，空間 L_m は各次元に1個の胞体，つまり胞体 $\sigma^0,\sigma^1,\sigma^2,\cdots$ に分割され，次が成り立つ：

$$\partial\sigma^{2k}=m\sigma^{2k-1}\qquad(k=1,2,\cdots)$$
$$\partial\sigma^{2k-1}=0\qquad(k=1,2,\cdots)$$

このとき，次がわかる：

$$H_i(L_m)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & i=0 \text{ のとき}\\ 0 & i=2k \text{ のとき}\\ \boldsymbol{Z}_m & i=2k+1 \text{ のとき}\end{cases}$$

$$H^i(L_m)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & i=0 \text{ のとき}\\ \boldsymbol{Z}_m & i=2k \text{ のとき}\\ 0 & i=2k+1 \text{ のとき}\end{cases}$$

すなわち，$H^*(K(\boldsymbol{Z}_m,1)\,;\,\boldsymbol{Q})=0$ である．

さて，任意の有限巡回群 π に対して $H^*(K(\pi,n)\,;\,\boldsymbol{Q})=0$ を示そう．$n=1$ についてはこの命題は証明されている．各 $n\leq s-1$ についてこれは正しいと仮定し，Serre ファイバー空間 $*\simeq E\xrightarrow{K(\pi,s-1)}K(\pi,s)$ を考える．ここで，$s-1\geq1$，すなわち，$s\geq2$ であり，したがって，底空間 $K(\pi,s)$ は単連結であり，Leray の定理を適用してよい．ファイバーはコホモロジー的には（$\boldsymbol{Q}$ 上のスペクトル系列を考えているので）帰納法の仮定により自明である．したがって，すべて



の微分は自明，すなわち，$E_2=E_\infty$ である．一方，$E_\infty=\mathscr{G}H^*(E;\boldsymbol{Q})=0$ であるから，$E_2=0$ である．したがって，$i>0$, $s\geq 1$ について $H^i(K(\pi,s);\boldsymbol{Q}))=0$ である．これが証明すべきものであり，有限巡回群 π をもつ $K(\pi,n)$ のコホモロジーに関する定理の最初の部分は証明された．

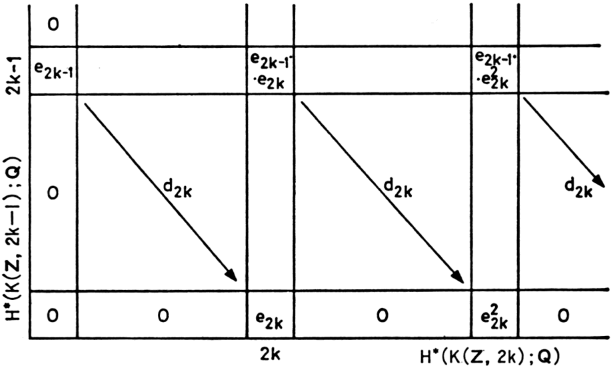
さて，定理の後半を次に証明しよう．Serre ファイバー空間 $*\simeq E\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z},2k-1)}K(\boldsymbol{Z},2k)$ を考える．定理は，$K(\boldsymbol{Z},1)$ については証明されている．すべての $s\leq 2k-1$ について定理は正しい，特に

$$H^i(K(\boldsymbol{Z},2k-1);\boldsymbol{Q})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Q} & i=0,2k-1\text{ のとき}\\ 0 & \text{その他の } i \text{ について}\end{cases}$$

と仮定する．$\boldsymbol{Q}$ 上のスペクトル系列を書き上げよう．この E_2 項は次の通りである：



ここで $E_2=E_3=\cdots=E_{2k}$ かつ $E_{2k+1}=E_{2k+2}=\cdots=E_\infty$ が成り立つ．このとき d_{2k} のみが零と異なる．(以下，コホモロジー・スペクトル系列の E_2 項の表において，群の代わりに生成元を書くことがある．)：



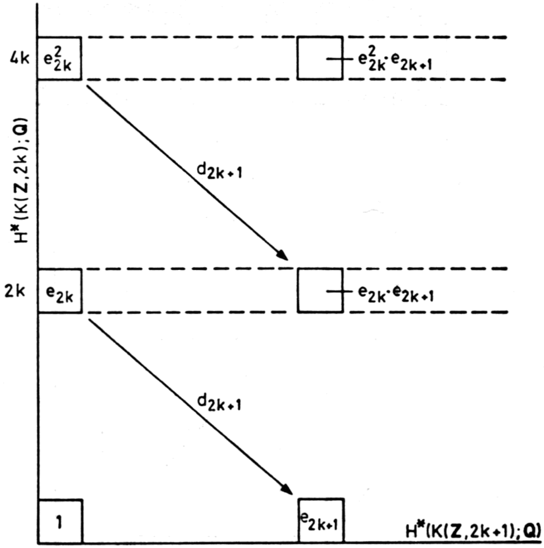
$E_{2k+1}=0$ であるので，$d_{2k}:E_{2k}^{0,2k-1}\to E_{2k}^{2k,0}$ は同型であり，したがって，

$E_2^{2k,0}\cong \boldsymbol{Q}$ かつ $d_{2k}(e_{2k-1})=e_{2k}$,　ただし $e_{2k}\in E_2^{2k,0}$ は生成元である．これより $H^{2k}(K(\boldsymbol{Z},2k);\boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Q}$ を得る．$p\leq 2k$ について群 $E_2^{p,q}$ はすでにわかっている：$E_2^{0,0}\cong E_2^{0,2k-1}\cong E_2^{2k,0}\cong E_2^{2k,2k-1}\cong\boldsymbol{Q}$ であり，その他は自明である．ここで群 $E_2^{2k,2k-1}$ の生成元は積 $e_{2k-1}e_{2k}$ である．$E_{2k+1}=0$ から $2k<q<4k$ について $E_{2k}^{q,0}=0$ かつ $E_{2k}^{4k,0}\cong\boldsymbol{Q}$ であることがわかり，一方，後者の生成元は $d_{2k}(e_{2k-1}e_{2k})=e_{2k}^2$ であり，したがって，$H^{4k}(K(\boldsymbol{Z},2k);\boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Q}$ である．同じ議論により次を得る：

$$H^i(K(\boldsymbol{Z},2k);\boldsymbol{Q})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Q} & i=0,2k,4k,6k,8k,\cdots \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他の } i \text{ について}\end{cases}$$

であり，群 $H^{2mk}(K(\boldsymbol{Z},2k);\boldsymbol{Q})$ の生成元は元 e_{2k}^m である．

最後に，Serre ファイバー空間 $*\simeq E\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z},2k)}K(\boldsymbol{Z},2k+1)$ を考える．$K(\boldsymbol{Z},2k)$ のコホモロジーはすでにわかっている．E_2 項を見てみよう．



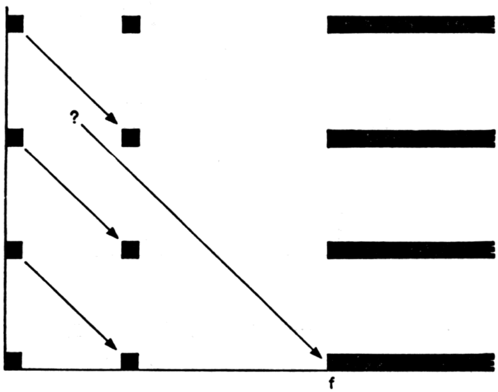
$E_\infty=0$ であるから，$p<2k+1$ について $E_2^{p,0}=0$ かつ $E_2^{2k+1,0}=E_{2k+1}^{2k+1,0}\cong\boldsymbol{Q}$，よって，微分 $d_{2k+1}^{0,2k}:E_{2k+1}^{0,2k}\to E_{2k+1}^{2k+1,0}$ は同型である．したがって $p\leq 2k+1$ を満たす群 $E_2^{p,q}=E_{2k+1}^{p,q}$ の中で零と異なるのは $E_2^{0,2mk}$ と $E_2^{2k+1,2mk}(m=0,1,2,\cdots)$

だけである．これらの生成元は $e_{2k}^m \in E_2^{0,2mk}$ と $e_{2k+1}e_{2k}^m \in E_2^{2k+1,2mk}$，ただし $e_{2k+1}=d_{2k+1}^{0,2k}(e_{2k})$ である．したがって，次を得る：

$$d_{2k+1}^{0,2mk}(e_{2k}^m)=me_{2k}^{m-1}(d_{2k+1}^{0,2k}e_{2k})=me_{2k}^{m-1}e_{2k+1}$$

すなわち，$d_{2k+1}^{0,2mk}$ は同型である．（ここで，係数は $\boldsymbol{Q}$ であり，m による割算は可能であることを用いている．）

さて，底辺の行では，生成元 e_{2k+1} から右には自明でない元は唯 1 つもない．実際，1 つ存在すると仮定し，最小次元をもつもの f を選ぶ．このとき，この



元と e_{2k+1} の間には零の列が並んでいる．$E_\infty=0$ であるから，元 f は 1 つの微分の像に入っていなければならないが，これから左のすべての元は，d_{2k+1} の像に入っているか，または d_{2k+1} により f とは確かに異なるある元に写される．このように，e_{2k+1} から右側には自明でない群はない．したがって，次が成り立つ：

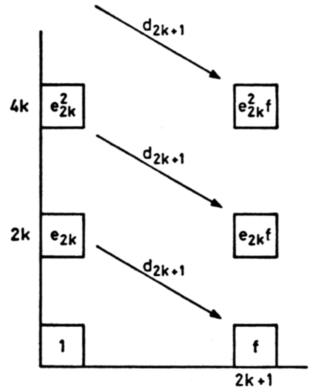
$$H^i(K(\boldsymbol{Z},2k+1)\,;\,\boldsymbol{Q})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Q} & i=0,2k+1 \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他の } i \text{ について}\end{cases}$$

（証明終）

球面のホモトピー群の階数を求めるために，この結果をいかに適用するかを示そう．球面 S^{2k+1} を考える．まず，$\pi_{2k+1}(S^{2k+1})\cong\boldsymbol{Z}$ である．S^{2k+1} の最初のキリング空間 $X=S^{2k+1}|_{2k+1}$ を調べる．したがって，$i\geq 2k+2$ について $\pi_i(X)\cong\pi_i(S^{2k+1})$ であり $i<2k+2$ について $\pi_i(X)=0$ である．X の有理係数コホモロジーを計算しよう．次のファイバー空間

$$X=S^{2k+1}|_{2k+1}\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z},2k)}S^{2k+1}$$

を考える．S^{2k+1} と $K(\boldsymbol{Z},2k)$ の有理係数コホモロジーはわかっているから，$H^{2k+1}(S^{2k+1};\boldsymbol{Q})$ の生成元を f として，直ちに E_2 項を次のように書ける：



ここで $d_2=d_3=\cdots=d_{2k}=d_{2k+2}=\cdots=0$ であり，したがって，

$$E_2=E_3=\cdots=E_{2k+1} \quad \text{かつ} \quad E_{2k+2}=E_{2k+3}=\cdots=E_\infty$$

である．$i<2k+2$ について $\pi_i(X)=0$ であるから，$i<2k+2$ について $H^i(X;\boldsymbol{Q})=0$ である．これは $E_\infty^{0,2k}=E_\infty^{2k+1,0}=0$，すなわち，

$$d_{2k+1}^{0,2k}:E_{2k+1}^{0,2k}\to E_{2k+1}^{2k+1,0}$$

は同型である．f により生成元 $d_{2k+1}^{0,2k}(e_{2k})\in E_{2k+1}^{2k+1,0}$ を表わす．このとき群 $E_{2k+1}^{0,2mk}$ と $E_{2k+1}^{2k+1,2mk}$ $(m=0,1,\cdots)$ の生成元はそれぞれ e_{2k}^m と $e_{2k}^m f$ $(m=0,1,\cdots)$ である．ここで $d_{2k+1}^{0,2mk}(e_{2k}^m)=me_{2k}^{m-1}f$ である．すなわち，各微分 $d_{2k+1}^{0,2m}$ は同型であるから $E_\infty=0$，よって，$H^*(S^{2k+1}|_{2k+1};\boldsymbol{Q})=0$，すなわち，$X=S^{2k+1}|_{2k+1}$ のすべての整係数コホモロジーは有限位数をもつことがわかる．

さて，さらに詳しく調べるために重要になる補題を1つ証明する．

補題　空間 Y のキリング空間 $Y|_q$ は自明な有理係数コホモロジーをもつと仮定する．このとき，これに続くすべての空間 $Y|_t$, $t>q$, も自明な有理係数コホモロジーをもつ．

証明　実際，次のファイバー空間

$$Y|_{q+1} \xrightarrow{K(\pi,q)} Y|_q$$

を考える．ただし，仮定により $\pi=\pi_{q+1}(Y|_q)\cong H_{q+1}(Y|_q)$ は有限群である．上の定理により，π が有限のとき $K(\pi,q)$ は有理数上でコホモロジー的に自明であるから，このファイバー空間のスペクトル系列も自明である．$\boldsymbol{Q}$ は体なので，$H^*(Y|_{q+1}\,;\boldsymbol{Q})=0$ である．同様に，任意の $t>q$ について $H^*(Y|_t\,;\boldsymbol{Q})=0$ である．（証明終）

補題の結果を記しておこう．

系　$H^*(Y|_q\,;\boldsymbol{Q})=0$ ならば，すべての $i>q$ について $\pi_i(Y)$ は有限である．

これは次を意味する．

定理　奇数次元の球面 S^{2k+1} のホモトピー群 $\pi_i(S^{2k+1})$ はすべての $i>2k+1$ について有限である．

この定理は球面の構造については何も利用していない．すなわち，次の命題が成り立つ．

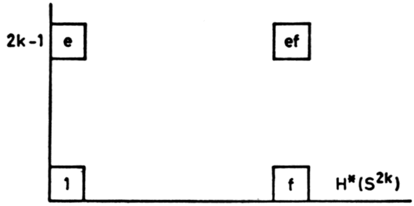
命題　X は CW 複体であり，

$$H^i(X\,;\boldsymbol{Q})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Q} & i=0,2k+1 \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他の } i \text{ について}\end{cases}$$

かつ $\pi_1(X)=0$ を満たすならば，$q\neq 2k+1$ のとき，すべてのホモトピー群 $\pi_q(X)$ は有限であり，$\pi_{2k+1}(X)$ は $\boldsymbol{Z}$ と有限群の直和である．

証明　実際，$X|_{2k}$ は $\boldsymbol{Q}$ 上でコホモロジーが自明であるファイバー空間の系列を通して X から得られたので $H^i(X|_{2k}\,;\boldsymbol{Q})\cong H^i(X\,;\boldsymbol{Q})$ である．さらに，$\pi_{2k+1}(X)\cong\pi_{2k+1}(X|_{2k})\cong H_{2k+1}(X|_{2k})\cong\boldsymbol{Z}\oplus$（有限群）である．

最後に，$H^*(K(\pi_{2k+1}(X),2k+1)\,;\boldsymbol{Q})\cong H^*(K(\boldsymbol{Z},2k+1)\,;\boldsymbol{Q})$ であり，上と同様な議論を展開できる．（証明終）



次に，偶数次元の球面 S^{2k} の場合を考察してみよう．ファイバー空間 $S^{2k}|_{2k}\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z},2k-1)}S^{2k}$ を考える．E_2 項については前ページの図式が成り立つ．

$i\leq 2k$ について $\pi_i(S^{2k}|_{2k})=0$ であるから，$E_\infty^{0,2k-1}=E_\infty^{2k,0}=0$ であり，微分 $d_{2k}^{0,2k-1}$ は同型である．したがって，

$$H^i(S^{2k}|_{2k}\,;\,\boldsymbol{Q})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Q} & i=0,4k-1 \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他の } i \text{ について}\end{cases}$$

が成り立つ．このとき，$S^{2k}|_{2k}$ は上の仮定を満たすコホモロジーをもつ空間である．すなわち，$i\neq 4k-1$ について $\pi_i(S^{2k}|_{2k})$ は有限であり，$\pi_{4k-1}(S^{2k}|_{2k})\cong\boldsymbol{Z}$ $\oplus$(有限群) である．結局，次のようになる．

定理

$$\pi_i(S^{2k})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z}\oplus(\text{有限群}) & i=4k-1 \text{ のとき}\\ \boldsymbol{Z} & i=2k \quad\text{ のとき}\\ \text{有限群} & i\neq 2k,4k-1 \text{ のとき}\end{cases}$$

$\pi_{4k-1}(S^{2k})$ において位数無限の元を見つけたことを思いおこそう．さて，この形の元および元 $[id]\in\pi_n(S^n)$ のみが乗数を除いて，球面のホモトピー群における位数無限の元である．

H. Cartan と J. P. Serre の定理

定理 (Cartan–Serre)　X は単連結な位相空間で $H^*(X\,;\,\boldsymbol{Q})$ は自由な歪可換多元環（すなわち，有限個の同次な元 $e_i\in H^{r_i}(X\,;\,\boldsymbol{Q})$, $i=1,2,\cdots,s$, により生成される多元環で，歪可換性 $\Longleftrightarrow$ すべての i,j について $e_ie_j=(-1)^{r_ir_j}e_je_i$ の関係式をもつが他の関係式はない）であると仮定する．このとき，群 $\pi_k(X)$ の階数は次数 k の生成元の個数（すなわち，k に等しい $r_1,r_2,\cdots,r_s$ の個数）に等しい．

定理の仮定の下に，$H^*(X;\boldsymbol{Q})$ はテンソル積 $\Lambda(x_1,x_2,\cdots,x_t)\otimes\boldsymbol{Q}[y_{t+1},\cdots,y_s]$ に分解する．ただし，$\boldsymbol{Q}[y_{t+1},\cdots,y_s]$ は偶数次数の生成元の可換な多項式環であり，$\Lambda(x_1,x_2,\cdots,x_t)$ は奇数次数の生成元の外積代数である．Cartan–Serre の定理が空間 X に適用できるならば，$H^*(X\,;\,\boldsymbol{Q})$ は外積代数かまたは X は無限次元であることに注意しよう．

かなりの数の特別な場合については，この定理をわれわれはすでに知っている．例えば，$H^*(X\,;\,\boldsymbol{Q})=0$ ならば群 $H_q(X)$ の階数は零に等しい．定理の条件は，任意の π と n について $K(\pi,n)$ のコホモロジー環についても満たされる．

すなわち，これは rank π と次数 n の生成元をもつ歪可換な自由多元環である．$n\geq 2$ については，（すでにわかっているように）次が成り立つ．

$$\operatorname{rank}\pi_i(K(\pi,n))=\begin{cases}0 & i\neq n \text{ のとき}\\ \operatorname{rank}\pi & i=n \text{ のとき}\end{cases}$$

空間 $X=S^{2k+1}$ もこの条件を満たす．したがって，この定理は本節の上で証明した公式を意味する：

$$\operatorname{rank}\pi_i(S^{2k+1})=\begin{cases}1 & i=2k+1 \text{ のとき}\\ 0 & i\neq 2k+1 \text{ のとき}\end{cases}$$

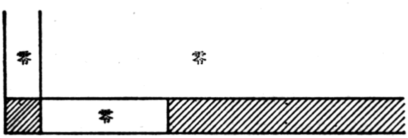
一方，偶数次数の生成元 $e\in H^{2k}(S^{2k}\,;\,\boldsymbol{Q})$ の平方は零であるから，この定理は偶数次元の球面 S^{2k} には適用できない．

Hopf の定理（J. W. Milnor–J. C. Moore : On the structure of Hopf algebra, Ann. of Math., 81(1965), 211–264, 参照）によれば，（任意の位相群を含む）任意の H–空間のコホモロジー多元環は歪可換な自由多元環である．例えば，$H^*(SU(n)\,;\,\boldsymbol{Q})\cong\Lambda(e_3,e_5,\cdots,e_{2n-1})$ はすでに示されている．このとき Cartan–Serre の定理は次の事実を意味しているにすぎない．

$$\pi_i(SU(n))\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z}\oplus(\text{有限群}) & i=3,5,\cdots,2n-1 \text{ のとき}\\ \text{有限群} & \text{その他の } i \text{ について}\end{cases}$$

Cartan–Serre の定理の証明

$H^*(X\,;\,\boldsymbol{Q})\cong\Lambda(e_1,e_2,\cdots,e_t)\otimes\boldsymbol{Q}[e_{t+1},\cdots,e_s]$ と仮定する．明確にするために，次数 $r_1,r_2,\cdots,r_s$ の中で最小のものを奇数 $2k+1$ と仮定する．これは，次数 $2k+1$ において $H^*(X\,;\,\boldsymbol{Q})$ は外積代数のある乗法生成元をもつことを意味する．これらを $e_1,e_2,\cdots,e_m$ と表わす．したがって，$1\leq i\leq m$ かつ $m\leq t$ について $\deg e_i=2k+1$ である．仮定により，$\pi_1(X)=0$ である．このとき，$H^2(X\,;\,\boldsymbol{Q})=0$ であるから，$H_2(X)\cong\pi_2(X)$ は有限である．ファイバー空間 $X|_2\xrightarrow{K(\pi_2(X),1)}X$ を考えると，このファイバーは $\boldsymbol{Q}$ 上で自明なコホモロジーをもつ．このとき，$\boldsymbol{Q}$ に係数をもつこのコホモロジー・スペクトル系列の E_2 項は次の形である：



したがって，$H^*(X|_2;\boldsymbol{Q})\cong H^*(X;\boldsymbol{Q})$ である．同様に，$H^*(X|_{2k};\boldsymbol{Q})\cong H^*(X;\boldsymbol{Q})$ を得る．定義により，空間 $X|_{2k}$ は $2k$ 連結であり，$i\geq 2k+1$ について $\pi_i(X|_{2k})\cong\pi_i(X)$ である．言いかえれば，X と $X|_{2k}$ のホモトピー群の階数はすべての次元で一致する．

$\pi_{2k+1}(X)$ を計算しよう．まず，$\pi_{2k+1}(X)\cong\pi_{2k+1}(X|_{2k})\cong H_{2k+1}(X|_{2k})$ である．一方，$H^{2k+1}(X;\boldsymbol{Q})\cong H^{2k+1}(X|_{2k};\boldsymbol{Q})\cong\oplus_1^m\boldsymbol{Q}$ である．このとき($\pi_{2k}(X|_{2k})=0$ であるから，$H^{2k+1}(X|_{2k})$は torsion をもたないので）$H^{2k+1}(X|_{2k})=\oplus_1^m\boldsymbol{Z}$ であり，$H_{2k+1}(X|_{2k})\cong(\oplus_1^m\boldsymbol{Z})\oplus$(有限群)である．（この有限群は $H^{2k+2}(X|_{2k})$ から生じる．）Hurewicz の定理により $\pi_{2k+1}(X|_{2k})\cong(\oplus_1^m\boldsymbol{Z})\oplus$(有限群)，すなわち rank $\pi_{2k+1}(X)=m$ ($H^*(X;\boldsymbol{Q})$ における次数 $2k+1$ の乗法生成元の個数）である．さて，次数 $2k+1$ の自由な生成元を消去しよう，各段階で1つの生成元を消去してキリング空間の系列 $X|^1_{2k+1}, X|^2_{2k+1},\cdots,X|^m_{2k+1}$ を構成する．すでにわかっているように，$\pi_{2k+1}(X|_{2k})\cong(\oplus_1^m\boldsymbol{Z})\oplus$(有限群) である．$H^{2k+1}(X|_{2k};\boldsymbol{Q})$ の各生成元 $e_1,e_2,\cdots,e_m$ に $\pi_{2k+1}(X|_{2k})$ の生成元 $\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\cdots,\tilde{e}_m$ が対応する．$\tilde{e}_1$ をとり，これに関する $X|_{2k}$ から $K(\boldsymbol{Z},2k+1)$ への埋込みを構成する．（次元 $2k+2$ から始まる $X|_{2k}$ のすべてのホモトピー群ばかりでなく，$\tilde{e}_1$ を除く $\pi_{2k+1}(X|_{2k})$ のすべての生成元を張り付ける．）このとき，埋込み $i:X|_{2k}\to K(\boldsymbol{Z},2k+1)$ により誘導されるホモトピー群の準同型 i_* は $\tilde{e}_1$ 以外のすべての生成元を零に写し，$\tilde{e}_1$ を群 $\pi_{2k+1}(K(\boldsymbol{Z},2k+1))$ の生成元に写す．i により誘導されるファイバー空間

$$\begin{array}{ccc} X|^1_{2k+1} & \longrightarrow & E\simeq * \\ {\scriptstyle K(\boldsymbol{Z},2k)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K(\boldsymbol{Z},2k)} \\ X|_{2k} & \xrightarrow{X|^1_{2k+1}} & K(\boldsymbol{Z},2k+1) \end{array}$$

を調べよう．$i\geq 2k+2$ について $\pi_i(X|^1_{2k+1})\cong\pi_i(X|_{2k})$ かつ $\pi_{2k+1}(X|^1_{2k+1})\cong\pi_{2k+1}(X|_{2k})/(\tilde{e}_1)$ であることを示す．ただし，$(\tilde{e}_1)$ は $\tilde{e}_1$ により生成される部分群である．すなわち，$\pi_{2k+1}(X|^1_{2k+1})\cong(\oplus_1^{m-1}\boldsymbol{Z})\oplus$(有限群) である．実際，ファイバー空間 $X|_{2k}\xrightarrow{X|^1_{2k+1}}K(\boldsymbol{Z},2k+1)$ のホモトピー完全系列の一部 ($\alpha=i^*$)

$$0\to\pi_{2k+1}(X|^1_{2k+1})\to\pi_{2k+1}(X|_{2k})\xrightarrow{\alpha}\pi_{2k+1}(K(\boldsymbol{Z},2k+1))\to\pi_{2k}(X|^1_{2k+1})\to 0$$

を考える．構成により，$\alpha(\tilde{e}_1)=e\in\pi_{2k+1}(K(\boldsymbol{Z},2k+1))$ は生成元であり，$2\leq i\leq m$ について $\alpha(\tilde{e}_i)=0$ である．このとき，$\pi_{2k}(X|^1_{2k+1})=0$ かつ $\pi_{2k+1}(X|^1_{2k+1})$

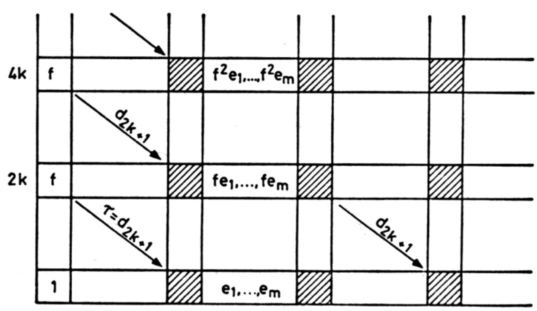
$\cong \mathrm{Ker}\,\alpha$ である．ただし，$\mathrm{Ker}\,\alpha$ は，唯 1 つ，すなわち，$\tilde{e}_1$ を除いて $\pi_{2k+1}(X|_{2k})$ のすべての生成元により生成される群である．したがって，群 $\pi_{2k+1}(X|^1_{2k+1})$ は自由な生成元 $\tilde{e}_2, \cdots, \tilde{e}_m$ をもつ．再び，同様な空間 $X|^2_{2k+1}$ で $i \neq 2k+1$ について $\pi_i(X|^2_{2k+1}) \cong \pi_i(X|^1_{2k+1})$ かつ $\pi_{2k+1}(X|^2_{2k+1}) \cong \pi_{2k+1}(X|^1_{2k+1})/(\tilde{e}_2)$ を満たすものを構成する．以下，空間 $X|^3_{2k+1}, X|^4_{2k+1}, \cdots$ を構成していく．

この操作のある段階で，系列 $X|^1_{2k+1}, X|^2_{2k+1}, \cdots$ のある項 $X|^m_{2k+1}$ は有限な π_{2k+1} をもつことがわかるが，この有限群も消去する．得られた空間 $X|_{2k+1}$ は $X|^m_{2k+1}$ と同じ有理係数コホモロジーをもち，そのホモトピー群は

$$\pi_i(X|_{2k+1}) \cong \begin{cases} \pi_i(X) & i > 2k+1 \text{ のとき} \\ 0 & i \leq 2k+1 \text{ のとき} \end{cases}$$

である．（この空間は前節で定義された $X|_{2k+1}$ にホモトピー同値であるが，これは以下で用いないから証明しない．この新しい空間にも同じ記号を用いることにする．後者の構成法を選ぶ理由は次の通りである．われわれは，$X|_{2k+1}$ の有理係数コホモロジーを求め，再び Cartan-Serre の定理の条件の範囲内にあることを明らかにする．われわれのよく知っているファイバー空間 $X|_{2k+1} \to X|_{2k}$ は，ファイバーが大きすぎて，計算がやり難いので，この目的には不便である．しかし，それに代わる方法を選ぶことにより，これを小さい部分に分けて，この巨大さを克服できる．）

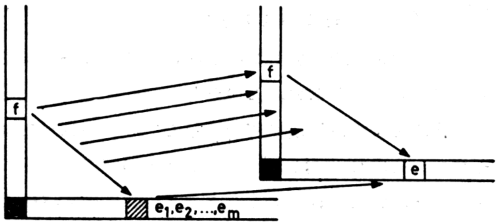
さて，$X|_{2k+1}$．すなわち，$X|^m_{2k+1}$ の有理係数コホモロジーを計算しよう．まず，ファイバー空間 $X|^1_{2k+1} \xrightarrow{K(\boldsymbol{Z}, 2k)} X|_{2k}$ を考える．このファイバー空間の $\boldsymbol{Q}$ 係数のコホモロジー・スペクトル系列の E_2 項は，次の通りである：



第零列では $H^*(K(\boldsymbol{Z},2k)\,;\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{Q}[f]$，ただし，$\deg f=2k$，が成り立ち，明らかに $E_2=\cdots=E_{2k+1}$ である．転入 $\tau=d_{2k+1}$ は f を e_1 に写す．これを証明するために，次のファイバー空間の間の写像

$$\begin{array}{ccc} X|^{1}_{2k+1} & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle K(\mathbf{Z},2k)}\downarrow & \curvearrowright & \downarrow{\scriptstyle K(\mathbf{Z},2k)} \\ X|_{2k} & \longrightarrow & K(\mathbf{Z},2k+1) \end{array}$$

により誘導されたスペクトル系列の間の準同型を考え，次を得る：



このとき，生成元 $e\in H^{2k+1}(K(\boldsymbol{Z},2k+1)\,;\boldsymbol{Q})$ は $e_1\in H^{2k+1}(X|_{2k}\,;\boldsymbol{Q})$ に，f は f に写され，したがって，スペクトル系列において $\tau(f)=e_1$ である．

さて，$d_{2k+1}(f^q)=qf^{q-1}e_1$，すなわち，$f^qe_1=d_{2k+1}\left(\dfrac{1}{q+1}f^{q+1}\right)$ であるから，第零列も $(2k+1)$ 列の e_1 の部分も E_{2k+2}（まして E_∞）項には移っていかないと結論できる．次に，元 e_1 により生成される $H^*(X|_{2k}\,;\boldsymbol{Q})$ のイデアル $J(e_1)$ と e_1 を含まないすべての元から成る部分多元環 H を考える．多元環 $H^*(X|_{2k}\,;\boldsymbol{Q})$ は自由であるから，これは加群の直和 $H^*(X|_{2k}\,;\boldsymbol{Q})\cong H\oplus J(e_1)$ となる．e_1 は外積代数の生成元であるから，$J(e_1)=e_1H$ であり，$J(e_1)$ における積は自明である．$\mathrm{Im}\,d_{2k+1}$ と E_{2k+1} の底辺の行との共通集合はイデアル $J(e_1)$ と一致する．実際，$x\in J(e_1)$，すなわち，$x=e_1P$ とすると（$d_{2k+1}P=0$ であるので）$x=(d_{2k+1}f)P=d_{2k+1}(fP)$ である．一方，$h\in H^*(X|_{2k}\,;\boldsymbol{Q})$ かつ $h\in\mathrm{Im}\,d_{2k+1}$，すなわち，$h=d_{2k+1}(\omega)$ とすると，$\omega=f\rho$，ただし $\rho\in H^*(X|_{2k}\,;\boldsymbol{Q})$，であるから，$h=(d_{2k+1}f)\rho=e_1\rho\in J(e_1)$ である．言いかえれば，E_{2k+1} から E_{2k+2} に移るとき，第1行に多元環 $H=H^*(X|_{2k}\,;\boldsymbol{Q})/J(e_1)$ を得る．E_{2k+2} の上の行には何があるのか？ $q>0$ について $E_{2k+1}^{p,q}$ の各元は $f^s(x+y)$，ただし $x\in J(e_1)$，

すなわち $x=e_1x', y\in H$, という形である．さて，$f^sx=d_{2k+1}\left(\dfrac{1}{s+1}f^{s+1}x'\right)$ であり，$d_{2k+1}(f^sy)=sf^{s-1}xy\neq 0$ である．したがって，$q>0$ については $E^{p,q}_{2k+2}$ には何も残らない．すなわち，E_{2k+2} に含まれる唯1つの自明でない群は底辺の行にあり，$\oplus_p E^{p,0}_{2k+2}=H=H^*(X|_{2k}\,;\,\boldsymbol{Q})/J(e_1)$ である．次元を考慮して，$E_{2k+2}=E_\infty\cong H^*(X|^1_{2k+1}\,;\,\boldsymbol{Q})$ を得る．したがって

$$H^*(X|^1_{2k+1}\,;\,\boldsymbol{Q})\cong H^*(X\,;\,\boldsymbol{Q})/J(e_1)\cong \Lambda(e_2,e_3,\cdots,e_t)\otimes\boldsymbol{Q}[e_{t+1},\cdots,e_s]$$

以上で，空間 $X|^1_{2k+1}$ を構成することにより，$\pi_{2k+1}(X)$ の生成元とともに，$H^*(X\,;\,\boldsymbol{Q})$ の乗法生成元を消去したことがわかる．この構成を繰り返すことにより，空間 $X|^m_{k+1}$ が得られて，同型

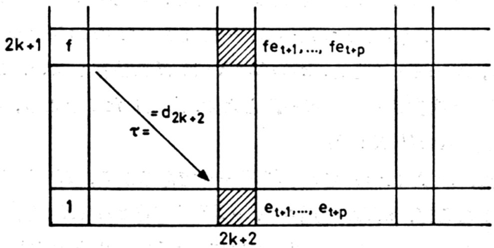
$$H^*(X|^m_{2k+1}\,;\,\boldsymbol{Q})\cong H^*(X|_{2k+1}\,;\,\boldsymbol{Q})\cong \Lambda(e_{m+1},\cdots,e_t)\otimes\boldsymbol{Q}[e_{t+1},\cdots,e_s]$$

が成り立つ．すなわち，Cartan–Serre の定理の条件内に留まっているが，今度は次数 $2k+1$ には生成元はない．

H^{2k+2} は偶数次数の生成元 $e_{t+1},e_{t+2},\cdots,e_{t+p}$ $(t+p\leq s)$ を含むとする．このとき，キリング空間 $X|^1_{2k+2},\cdots,X|^p_{2k+2}$ を構成して，逐次これらを消去していく．まず，上の構成を言葉通り繰り返して，

$$E_2=H^*(X|_{2k+1}\,;\,\boldsymbol{Q})\otimes H^*(K(\boldsymbol{Z},2k+1)\,;\,\boldsymbol{Q})\cong H^*(X|_{2k+1}\,;\,\boldsymbol{Q})\otimes\Lambda(f)$$

を満たすスペクトル系列を得る．ただし $\deg f=2k+1$ であり，($X|^1_{2k+2}$ は e_{t+1} に対応する $\pi_{2k+2}(X)$ の生成元を消去すると仮定して) $d_{2k+2}(f)=e_{t+1}$ であること



とがわかる．再び，(加群の)直和

$$H^*(X|_{2k+1}\,;\,\boldsymbol{Q})\cong H\oplus J(e_{t+1})$$

が成り立つ．ただし，H は e_{t+1} を含まない元から成る．前の場合とは異なり，$J(e_{t+1})$ における積は自明ではなく，$J(e_{t+1})\neq e_{t+1}H$ であることに注意しよう．以前と同様，E_∞ には底辺の行のみが生き残り，これは次のものから成る：

$$H^*(X|^1_{2k+2}\,;\,\boldsymbol{Q})\cong H^*(X|_{2k+1}\,;\,\boldsymbol{Q})/J(e_{t+1})$$
$$\cong\Lambda(e_{m+1},e_{m+2},\cdots,e_t)\otimes\boldsymbol{Q}[e_{t+2},e_{t+3},\cdots,e_{t+p},\cdots,e_s]$$

すなわち，これ以外の乗法生成元は消滅したのである．

この議論を続けて行なって，次を示すことができる．

$$H^*(X|_{2k+2}\,;\,\boldsymbol{Q})\cong\Lambda(e_{m+1},\cdots,e_t)\otimes\boldsymbol{Q}[e_{t+p+1},\cdots,e_s]$$

さらに，$X|_{2k+3}, X|_{2k+4},\cdots$ などを考え，定理を得る．　(証明終)

Cartan–Serre の定理に関するいくつかの注意

(1) この定理は，偶数次元の球面の例で認めたように，すべての空間に適用できるわけではない．この定理の証明方法は一般にホモトピー群の階数を計算するのに適用できる．しかしながら，任意の単連結空間に正確な結果を得ること，すなわち，ホモトピー群の階数をコホモロジー環(の言葉)で表現することは，はるかに難しい[†]．しかし，次が成立つ．

定理　任意の単連結空間 X について，$\pi_2(X)=\cdots=\pi_{n-1}(X)=0$（または $\pi_2(X),\cdots,\pi_{n-1}(X)$ は有限)ならば，

$$\pi_i(X)\otimes\boldsymbol{Q}\cong H^i(X\,;\,\boldsymbol{Q}),\quad i<2n-1$$

である．

証明は，$H^*(X\,;\,\boldsymbol{Q})$ の積構造が影響を及ぼさない次数を調べなければならないので，Cartan–Serre の定理と同様であるが，むしろやさしい．

この定理の重要な結果を1つ述べる．一般化された Freudenthal の定理（§20 参照）により，$N>i+1$ のとき，$\pi_{N+i}(\Sigma^N X)$ は N に依存しない．これを $\pi_i^S(X)$ と表わし，X の i 次**安定ホモトピー群**とよぶ．上述したことより，各 i について

$$\pi_i^S(X)\otimes\boldsymbol{Q}\cong H^i(X\,;\,\boldsymbol{Q})$$

である．実際，$i<N$ について $\pi_i(\Sigma^N X)=0$ であるから，$N>i+1$，すなわち，$N+i<2N-1$ ならば，$\pi_i^S(X)\otimes\boldsymbol{Q}\cong\pi_{N+i}(\Sigma^N X)\otimes\boldsymbol{Q}\cong H^i(X\,;\,\boldsymbol{Q})$ である．

(2) Cartan–Serre の定理の命題において，$\pi_1(X)=0$ と仮定し，証明の過程で，この仮定が使われる点を指摘した．実際，この定理はもっと一般な状況でも成り立つ．すなわち，（コホモロジーの構造に関する条件の他に）X の単純性，すなわち，$\pi_1(X)$ が群 $\pi_r(X), r\geq 1$，に自明に作用することを要求すれば

† (Cartan–Serre の定理の適切な一般化とみなしてよい) 有理ホモトピー型の十分な理論は，D. Sullivan により1970年代後半に発展された．

十分である．これは例えば，すべての Lie 群，さらには任意の H–空間についても成り立つ．

「良い」有理係数コホモロジーをもつが，Cartan–Serre の定理は成り立たない空間の例が多くあるので，X は単純であるという条件は本質的である．実際，$X=\boldsymbol{RP}^2$ とするとき，$\pi_1(X)\cong\boldsymbol{Z}_2$ であり，X は単純ではない．（すなわち，生成元 $\alpha\in\pi_1(X)$ は $\pi_2(X)$ に -1 の掛け算で作用する．）X の有理係数コホモロジー群は正の次元で自明であり，したがって，もし定理が適用されれば，X のすべてのホモトピー群は有限であるということになるが，実は $\pi_2(\boldsymbol{RP}^2)\cong\pi_2(S^2)\cong\boldsymbol{Z}$ である．おもしろいことに，この有理係数のコホモロジーには有限の基本群が作用する．

X は単純であるという仮定の下に Cartan–Serre の定理の証明を，あまり詳細にわたらずに概説しよう．

X は単純であり $\pi_1(X)=G$ と仮定する．（基本群の可換性は 1 単純性に同値であるから）X の単純性は G が可換であることを意味する．さて，$H_1(X)$ は基本群の可換化であるから，$H_1(X)\cong G$，また，$\operatorname{rank}\pi_1=\operatorname{rank}H_1=\operatorname{rank}H^1$ であり，これは $H^*(X;\boldsymbol{Q})$ の次数 1 の生成元の個数に等しい．言いかえれば，定理は $\pi_1(X)$ について正しい．$H^1(X;\boldsymbol{Q})$ の生成元を $e_1,e_2,\cdots,e_k$ で表わす．普遍被覆 $p:T\xrightarrow{G}X$ を考え，次を示そう．

補題　$H^*(T;\boldsymbol{Q})\cong H^*(X;\boldsymbol{Q})/(e_1,e_2,\cdots,e_k)$

ただし，$(e_1,e_2,\cdots,e_k)$ は次数 1 の生成元で生成されるイデアルである．

（普遍被覆を構成するよりも 1 つの生成元 e_1 のみを展開したならば，$H^*(T_{e_1};\boldsymbol{Q})\cong H^*(X;\boldsymbol{Q})/(e_1)$ が成り立つであろう．）

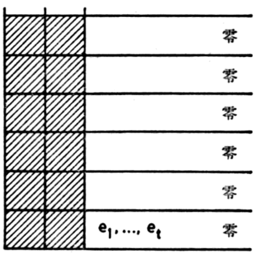
$\pi_1(T)=0$ かつ $k\geq2$ について $\pi_k(T)\cong\pi_k(X)$ であり，$H^*(T;\boldsymbol{Q})$ は自由な歪対称多元環であるから，「単連結な」Cartan–Serre の定理が適用できて前ページの定理はこの補題から直ちに出る．

基本群の同型により誘導される埋込み $X\subset K(G,1)$，および，これとホモトピー同値なファイバー空間 $X\to K(G,1)$ を考える．このとき，ファイバーは T にホモトピー同値である．（これはキリング空間の 2 つの変形，すなわち，ファイバー $K(\pi_n(X),n-1)$ をもつファイバー空間の全空間，または底空間 $K(\pi_n(X),n)$ をもつファイバー空間のファイバー，の同値性の類似である．）

さて，ファイバー空間 $X\xrightarrow{T}K(G,1)$ を考えるが，このコホモロジー・スペクトル系列の E_2 項が $H^*(K(G,1)\,;H^*(T))$ であるとは，直ちに主張はできない．というのは，この定理は底空間が単連結であるときに証明されただけであるから．けれども，重要な役割は底空間ではなくて，ファイバーの次の性質によって果たされたのだということを思いおこそう：底空間における1対の点 x,y を結ぶ任意の道はホモトープな写像 $F_x\to F_y$ を誘導する．あるいはその代わりに，底空間において点 x から始まり，終わる任意の閉じた道は，恒等写像にホモトープな写像 $F_x\to F_x$ を誘導する．この場合，この事実は X の単純性により保証される．すなわち，ファイバー空間のファイバー T への基本群 $K(G,1)$ の作用は，モノドロミー群としての $\pi_1(X)\cong G$ の T への作用と(ホモトピーを除いて)一致する．後者は，$\pi_r(T)$ の上に $\pi_1(X)$ が $\pi_r(X)\cong\pi_r(T)$ の上へ定義するのと同じ自己同型，すなわち，恒等的自己同型を定義する．したがって，$E_2\cong H^*(K(G,1)\,;H^*(T))$ である．ここで次が成り立つ：

$$H^q(K(G,1)\,;\boldsymbol{Q})\cong\begin{cases}\boldsymbol{Q} & q=0\text{ のとき}\\ \underbrace{\boldsymbol{Q}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Q}}_{\mathrm{rank}\,G} & q=1\text{ のとき}\\ 0 & q>1\text{ のとき}\end{cases}$$

以上より E_2 項は次の形をもつ：



明らかに，(次元を考慮して) $E_2\cong E_\infty$ であり，$H^*(X)\cong H^*(T)\otimes\Lambda(e_1,e_2,\cdots,e_k)$ である．（証明終）

(3) X の単純性という条件はもっと弱めることができる．実は，任意の $\alpha\in\pi_1(X)$ と $\beta\in\pi_r(X)$ に対して，差 $\alpha(\beta)-\beta$ が $\pi_r(X)$ の有限位数の元であると要求すれば十分である．これは，モノドロミー群からの任意の変換は，$H^*(T\,;\boldsymbol{Q})$ の恒等写像を誘導することを保証している．

§25. 環 $H^*(K(\pi, n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$

これまでは，$K(\pi,n)$ の有理係数コホモロジーについての情報を利用しただけである．次には $H^*(K(\pi,n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ が必要になる．

これまで見てきたように，$H^*(K(\pi,n)\,;\,\boldsymbol{Q})$ の情報とともに，キリング空間の系列

$$X \leftarrow X|_n \leftarrow X|_{n+1} \leftarrow \cdots$$

により，X のホモトピー群の自由成分を決定できる．$K(\pi,n)$ の mod p コホモロジーは，ホモトピー群の torsion を求めるのに必要である．($K(\pi,n)$ の整係数コホモロジーもわかっているが，これについてはここでは考察しない．)

$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ の計算

複体 $K(\boldsymbol{Z}_p,1)$ の位相的解釈はすでにわかっている．すなわち，これは無限次元レンズ空間 $K(\boldsymbol{Z}_p,1)=L_p$ である．われわれはこの胞体構造も知っているので容易にコホモロジーの構造も解説できる．

定理 任意の素数 p と p' に対して

$$H^i(K(\boldsymbol{Z}_p,1)\,;\,\boldsymbol{Z}_{p'}) \cong \begin{cases} 0 & p \neq p' \text{ かつ } i>0 \text{ のとき} \\ \boldsymbol{Z}_p & \text{すべての } i \geq 0 \text{ について } p=p' \text{ のとき} \end{cases}$$

もし $p=p'$ ならば，$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,1)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ における積は次で与えられる：$H^i(K(\boldsymbol{Z}_p,1)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ に生成元 $e_i\,(i=1,2,\cdots)$ が存在して

(1) $p\neq 2$ のとき，$e_3=e_1e_2$, $e_4=e_2^2$, $e_5=e_1e_2^2$, $e_6=e_2^3, \cdots, e_1^2=0$, すなわち，

$$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p\,;\,1)\,;\,\boldsymbol{Z}_p) \cong \boldsymbol{Z}_p[e_2] \otimes \Lambda(e_1)$$

(2) $p=2$ のとき，すべての i について $e_i=e_1^i$, すなわち，

$$H^*(K(\boldsymbol{Z}_2,1)\,;\,\boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2[e_1]$$

証明 $K(\boldsymbol{Z}_p,1)$ は各次元に 1 つの胞体 $\sigma^0, \sigma^1, \cdots$ をもつように分割され，結合係数は次を満たしていることを思いおこそう：

$$[\sigma^{i+1} : \sigma^i] = \begin{cases} 0 & i \text{ は偶数} \\ p & i \text{ は奇数} \end{cases}$$

上の定理の「加法的」な部分はこれから直ちにわかる．「乗法的」な部分は，これまですでに，$p=2$ ($K(\boldsymbol{Z}_2,1)=\boldsymbol{RP}^\infty$) については証明されている．

$p>2$ とし，ファイバー S^1 をもつファイバー空間 $\pi : L_p \to \boldsymbol{CP}^\infty$ (写像 π は点

$(z_0, z_1, \cdots) = (z_0 e^{\frac{2\pi i}{p}}, z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}}, \cdots) = \cdots = (z_0 e^{\frac{2\pi i}{p}(p-1)}, z_1 e^{\frac{2\pi i}{p}(p-1)}, \cdots)$に点$(z_0 : z_1 : \cdots) \in \boldsymbol{C}P^\infty$を対応させる）を考える．このコホモロジー・スペクトル系列のE_2項は

f	0	fe_2	0	fe_2^2	0	fe_2^3	0	$\cdots$
1	0	e_2	0	e_2^2	0	e_2^3	0	$\cdots$

で与えられる．群$H^q(L_p\,;\boldsymbol{Z}_p)$についてわれわれが知っていることより$E_2 = E_3 = \cdots = E_\infty$であり，$H^q(L_p\,;\boldsymbol{Z}_p) \cong \boldsymbol{Z}_p$において生成元$e_q$を$e_{2k} = e_2^k$かつ$e_1 e_{2k} = e_{2k+1}$が成り立つように選ぶことができる．さらに，（コホモロジーの積の歪対称性により）$e_1^2 = -e_1^2$であるから，$e_1^2 = 0$である．（証明終）

さて，環$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p, n)\,;\boldsymbol{Z}_{p'})$を計算する．ただし，$p$と$p'$は素数である．$p \neq p'$と仮定する．$K(\boldsymbol{Z}_p, 1)$の mod p' コホモロジー群は自明である．$K(\boldsymbol{Z}_p, n-1)$についても同じことが成り立つと仮定し，ファイバー空間

$$* \simeq E \xrightarrow{K(\boldsymbol{Z}_p, n-1)} K(\boldsymbol{Z}_p, n)$$

を考える．ただし，全空間は可縮である．したがって，$K(\boldsymbol{Z}_p, n)$の mod p' コホモロジーも自明である．すなわち，$p \neq p'$ならば$q > 0$について$H^q(K(\boldsymbol{Z}_p, n)\,;\boldsymbol{Z}_{p'}) = 0$である．

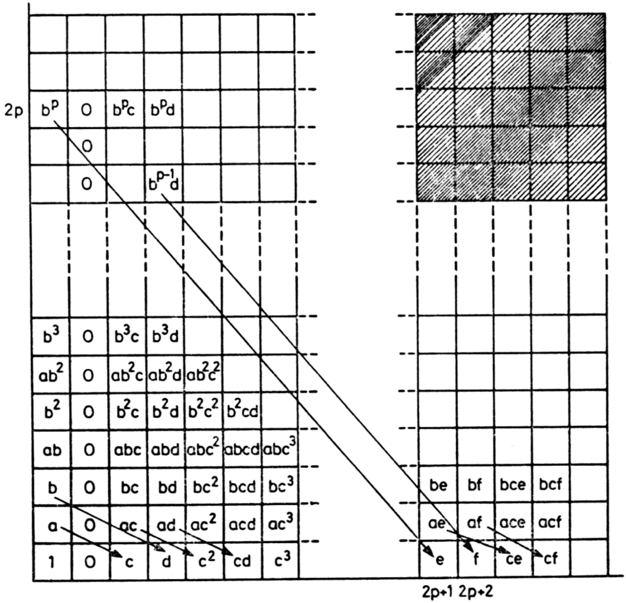
次に$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p, n)\,;\boldsymbol{Z}_p)$を計算する．最初に，ファイバー空間

$$* \simeq E \xrightarrow{K(\boldsymbol{Z}_p, 1)} K(\boldsymbol{Z}_p, 2)$$

の mod p コホモロジー・スペクトル系列を考える．このとき，E_2項は次ページの図の通りである．$\pi_1(K(\boldsymbol{Z}_p, 2)) = 0$であるから，各$q$について$E_2^{1,q} = 0$である．$E_2$項の第零列には

$$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p, 1)\,;\boldsymbol{Z}_p) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z}_p[b] \otimes \Lambda(a) & p \neq 2 \text{ のとき} \\ \boldsymbol{Z}_p[a] & p = 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

がある．ただし，$\deg a = 1$, $\deg b = 2$である．以下，$p \neq 2$とする．このファイバー空間の全空間は可縮であるから，$E_\infty = 0$．したがって$d_2(a) \neq 0$である．そこで$d_2(a) = c$と表わすとcは明らかに，$E_2^{2,0}$の唯1つの生成元である．したがって，E_2項の第2列は第零列にcを掛けて得られる．このときbの像は何であろうか？　$d_2(b)$は生成元acをもつ群$E_2^{2,1}$に属するから，$d_2(b) = k \cdot ac$, $k \in$



$\boldsymbol{Z}_p$, である．$k=0$ であることを証明しよう．再び d_2 を作用させると $0=d_2^2(b)=kd_2(ac)=kc^2$ であり，$\boldsymbol{Z}_p$ において $k\neq 0$ ならば $H^4(K(\boldsymbol{Z}_p,2);\boldsymbol{Z}_p)$ において $c^2=0$ である．これは以下に示すように直ちに矛盾を導く．元 $c\in H^2(K(\boldsymbol{Z}_p,2);\boldsymbol{Z}_p)$ は，任意の空間 X と任意の $\alpha\in H^2(X;\boldsymbol{Z}_p)$ に対して，写像 $f:X\to K(\boldsymbol{Z}_p,2)$ が存在して，$f^*(c)=\alpha$ が成り立つという性質をもっていることがわかっている（§17, p. 126 を参照；そこでは c の代わりに記号 e を用いた）．このとき $f^*(c^2)=\alpha^2$ であり，任意の X と $\alpha\in H^2(X;\boldsymbol{Z}_p)$ に対して，関係式 $\alpha^2=0$ を得るが，これは $\boldsymbol{CP}^\infty$ の例で見たように，正しくはない．したがって，E_2 項において $c^2\neq 0$ を証明したことになる．任意の整数 m について $c^m\neq 0$ を示すのに同じ議論を逐語的に展開することができる．（これは以下で大切である．）以上より $d_2(b)=0$ が得られ，b は E_3 に生き残る．さて，$E_\infty=0$，したがって，次元を考慮して，$d_3(b)\neq 0$ であり，それを $d_3(b)=d$ と表わす．c と d 以外にはそれぞれ $E_2^{2,0}$ と $E_3^{3,0}$ には，同じ理由 $(E_\infty=0)$ により生成元はない．微分 $d_2^{1,1}:E_2^{1,1}\to E_2^{3,0}$ は自明 $(E_2^{1,1}=0)$ であるから $E_2^{3,0}=E_3^{3,0}$，すなわち，生成元 d は同

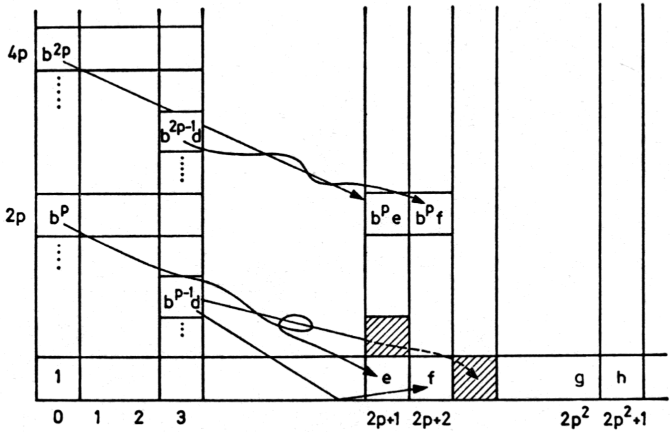
型な群 $E_2^{3,0}$ から $E_3^{3,0}$ に生き残る．すなわち，$H^3(K(\boldsymbol{Z}_p,2)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)\cong\boldsymbol{Z}_p$ を示したことになる．上でみたように，2つの生成元 c と d が E_2 項の第零行に現われる．これらは互いに隣り合って存在し，次数2と3をもつ．$p\neq 2$ と仮定しているから（d は奇数次数であるので）$d^2=0$ である．ここで任意の m について，$c^m\neq 0$ であることはすでに知っている．E_2 項においてはすべての $m<p$ について $c^m d\neq 0$ を証明する．実際，ある $m<p$ について $c^m d=0$ であり，かつすべての $l<m$ について $c^l d\neq 0$ とする．群 $\bigoplus_{\substack{0\le p\le 2m+2\\ 0\le q<\infty}} E_2^{p,q}$ は $a^{\varepsilon_1}b^s c^t d^{\varepsilon_2}$ という形の元で加法的に生成されている．ただし，$\varepsilon_1=0$ または1，$\varepsilon_2=0$ または1，s は任意，$\varepsilon_2=0$ のとき $t\le m+1$，$\varepsilon_2=1$ のとき $t\le m-1$ であり，また $d_2(ab^s c^t d^{\varepsilon_2})=b^s c^{t+1} d^{\varepsilon_2}$ および $d_3(b^s)=sb^{s-1}d$ が成り立つ．（c と d の他に，次数 $\le 2m+2$ において底辺の行にさらに乗法生成元があれば，この元の左にある元はこの元に写されることはないから，この元も E_∞ に生き残るであろう．）したがって，元 $ac^{m-1}d$ は，いかなる微分の像にもなりえない．（上の公式により，次数の関係で $ac^{m-1}d$ に写されるかもしれない元は，何か他の元へ行くかまたはそれ自身微分の像である．）$ac^{m-1}d$ が E_∞ に生き残らないために残る唯1つの可能性は，$d_2(ac^{m-1}d)\neq 0$ である．さて，$d_2(ac^{m-1}d)=c^m d$ であり，したがって $c^m d\neq 0$ である．

このように，最初の $2p$ 列においては，ほとんどすべての元が微分 d_2 と d_3 により消去される．E_4 には何が生き残るのであろうか？　明らかに，生き残る元は（$d_3(b^{kp})=kpb^{kp-1}d=0$ なので）すべての k について b^{kp} と $b^{kp-1}d$ だけである．これらは微分により最初の $2p$ 列にある元には写されはしない．というのは，そこではすべての元が「使用されて」いるから．（すなわち，$ab^s c^t d^\varepsilon$ という形の元は，微分 d_2 に関して輪体ではない；$t\ge 0$ について $b^s c^t d^\varepsilon$ という形の元は微分 d_2 の像に入っている；b^{kp} と b^{kp-1} を例外にして，元 b^s と $b^s d$ は微分 d_3 により消去される．）次ページに E_4 項の図がある．

ここで b^p（E_4 項は元 b をもはや含んでいないから，b^p は何かの p 巾ではないので b^p は条件付きで書かれている）は，微分 $d_{2p+1}^0 : E_{2p+1}^{0,2p}\to E_{2p+1}^{2p+1,0}$ によってのみ消去できる．さらに，b^p は（すべて「使用されて」いる）c と d のいかなる多項式にも写されることはない．その像 $d_{2p+1}(b^p)$ は新しい乗法生成元

$$e\in E_2^{2p+1,0}=H^{2p+1}(K(\boldsymbol{Z}_p,2)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$$

に由来する元である．



$K(\boldsymbol{Z}_p, 2)$ のコホモロジーを次元 $2p^2$ まで計算する際に，克服しなければならない最後の難関は，d_{2p-2} が $b^{p-1}d$ を零に写すのを示すことである．（これは自明ではない．この元は $c^{p-1}da$ または ea のいずれかに写されるかもしれず，これは $d_2(c^{p-1}da)=c^pd=0$ または $d_2(ea)=ce=0$ を意味して，これらのいずれも，これまでの何ものにも矛盾しない．）実は，後で示されるように，$d_{2p-2}(b^{p-1}d)=0$ である．次に，これより出る結果を調べよう．$d_{2p-2}(b^{p-1}d)=0$ であると $d_{2p-1}(b^{p-1}d)$ は零ではなくて，もう1つの新しい乗法生成元

$$f\in E_2^{2p+2,0}=H^{2p+2}(K(\boldsymbol{Z}_p,2)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$$

に由来する元になる．

元 $ae\in E_2^{2p+1,1}$ は d_2 により ce に写される．（したがって，$ce=0$ は ae が E_∞ に生き残ることを意味するので $ce\neq0$.）同様に，$d_3(be)=de\neq0$ である．e 上の列は，ab^se と b^se を含む．$d_2(ab^se)=b^sce\neq0$ であり，s が p を割り切らなければ $d_3(b^se)=sb^{s-1}e\neq0$ である．したがって，E_4 項におけるこの列は $b^{kp}e$ という形の元のみを含む．同様に，E_4 項における f 上の列では元 $b^{kp}f$ が生き残る．明らかに $d_{2p+1}(b^{kp})=kb^{(k-1)p}e$ であり，$d_{2p-1}(b^{kp-1}d)=d_{2p-1}(b^{p-1}db^{(k-1)p})=b^{(k-1)p}f$ である．したがって，E_4 項の最初の $(2p+2)$ 列の元は，生き残る b^{p^2} と $b^{(p-1)p}e$ までは微分によりすべて消去される．この2つの元は第零行で（それぞれ次数 $2p^2+1$ と $2p^2+2$ の）新しい生成元になる．この第零行では，これらの次数未満では生成元も関係式も含まない．（すなわち，e^2 と d^2 は零に

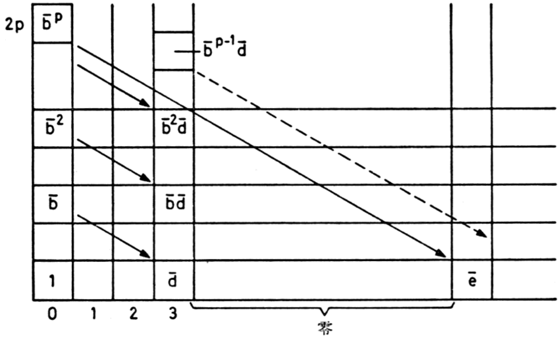


等しいが，c, d, e, f の可能な多項式はすべてある.）

同じ議論を用いて，$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,2);\boldsymbol{Z}_p)$ の乗法生成元は次数 2，3，$2p+1$，$2p+2$，$2p^2+1$，$2p^2+2$，… にあり，かつ $H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,2);\boldsymbol{Z}_p)$ は偶数次数の生成元の多項式環と奇数次数の生成元の外積代数のテンソル積であることが示せる.

証明はまったく自明というわけではない．われわれが行なった部分でさえもギャップがあり，それをこれから埋める.

まず，$d_{2p-2}(b^{p-1}d)=0$ を証明しなければならない．ファイバー空間 $*\simeq E\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z},2)}K(\boldsymbol{Z},3)$ を考える．コホモロジー・スペクトル系列の E_2 項は次の図の通りである．ただし，ファイバー $K(\boldsymbol{Z},2)=\boldsymbol{CP}^\infty$ のコホモロジーはすで



に知っている：$H^*(K(\boldsymbol{Z},2);\boldsymbol{Z}_p)\cong\boldsymbol{Z}_p[\bar{b}]$, $\deg\bar{b}=2$．容易に示せるように，$H^*(K(\boldsymbol{Z},3);\boldsymbol{Z}_p)$ は次数 $2p+1$ より下では唯 1 つの加法的生成元 $\bar{d}$, $\deg\bar{d}=3$ をもち，（次元を考慮して）任意の $i\leq 2p-3$ について $d_i(\bar{b}^{p-1}\bar{d})=0$ である．さて，写像 $\varphi: K(\boldsymbol{Z}_p,2)\to K(\boldsymbol{Z},3)$ が存在して，$\varphi^*(\bar{d})=d\in H^3(K(\boldsymbol{Z}_p,2);\boldsymbol{Z}_p)$ である．実際，このような写像は（例えば，ファイバー空間 $*\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z}_p,1)}K(\boldsymbol{Z}_p,2)$ の整係数コホモロジー・スペクトル系列を考えて示せるように）$H^3(K(\boldsymbol{Z}_p,2);\boldsymbol{Z})$ の元を用いて構成できる．$H^3(K(\boldsymbol{Z}_p,2);\boldsymbol{Z})\cong\boldsymbol{Z}_p$ であり，したがって，$d\in H^3(K(\boldsymbol{Z}_p,2);\boldsymbol{Z}_p)$ は整係数の元，すなわち，d は次の簡約準同型

$$\rho_p: H^3(K(\boldsymbol{Z}_p,2);\boldsymbol{Z})\to H^3(K(\boldsymbol{Z}_p,2);\boldsymbol{Z}_p)$$

の像に含まれている．$H^3(K(\boldsymbol{Z}_p,2)\,;\,\boldsymbol{Z})$ における d の任意の原像に応じて写像 $\varphi: K(\boldsymbol{Z}_p,2)\to K(\boldsymbol{Z},3)$ を構成すると，これは求める性質をもっている．この写像 $\varphi: K(\boldsymbol{Z}_p,2)\to K(\boldsymbol{Z},3)$ はループ空間の写像，したがって，次の Serre ファイバー空間の写像を誘導する：

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & * \\ {\scriptstyle K(\boldsymbol{Z}_p,1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K(\boldsymbol{Z},2)} \\ K(\boldsymbol{Z}_p,2) & \longrightarrow & K(\boldsymbol{Z},3) \end{array}$$

この写像によりスペクトル系列において誘導される準同型は（φ の構成により）$\bar{d}$ を d に，$\bar{b}$ を b に写す（$\bar{b}$ は $d_2(b')=d$ を満たす元 b' に写され，したがって，$b'=b$）．したがって，$\bar{b}^{p-1}\bar{d}$ は $b^{p-1}d$ に写され，結局 $d_{2p-2}(\bar{b}^{p-1}\bar{d})=0$ は $d_{2p-2}(b^{p-1}d)$ に写され，よって，$d_{2p-2}(b^{p-1}d)=0$ である．

注意　上で考えているのは $p\neq 2$ の場合であることを強調しておく．読者は $H^*(K(\boldsymbol{Z}_2,2)\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ を調べ，$p\neq 2$ の場合と比べて，この場合 $d^2\neq 0$ であり，かつ望ましい関係式 $d^2=c^3$ は正しくないから，状況はむしろ複雑になっているのをみてほしい．

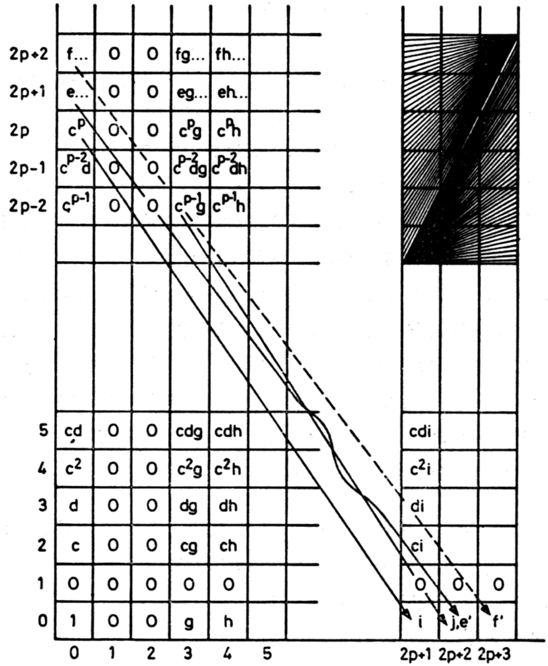
環 $H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,3)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ を次に考えよう．次のファイバー空間

$$*\simeq E\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z}_p,2)}K(\boldsymbol{Z}_p,3)$$

の mod p コホモロジー・スペクトル系列の図解は次ページにある．このスペクトル系列の最初の 4 列では d_2 は次元の関係で自明である．明らかに $d_3(c)\neq 0$ であり，$d_3(c)=g$ とおくとき $d_3(c^k)=kc^{k-1}g$ であり，$k<p$ である限りは，第 3 列の $c^{k-1}g$ という形のすべての元は微分 d_3 の像になり，E_4 には生き残らない．$d_3(d)=0$ であるから，$d_4(d)\neq 0$ である．そこで $d_4(d)=h$ とおく．上と同じ考察で，c^p より下の最初の $2p$ 列の元は第 3 と第 4 の微分で消去され，底辺の行は g と h 以外の生成元と $g^2=0$ 以外の関係式を含まないことがわかる．次に $d_3(c^p)=pc^{p-1}g=0$ のとき，再び最初の変則性が現われ，元 $c^{p-1}g$ は消去されない．生成元 c^p は d_{2p+1} により新しい生成元

$$i\in H^{2p+1}(K(\boldsymbol{Z}_p,3)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$$

に写され，$c^{p-1}g$ は $H^{2p+2}(K(\boldsymbol{Z}_p,3)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ の新しい生成元 j に写される．元 e と f も転入的で，したがって $H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,3)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ において次数 3，4，$2p+1$，$2p+2$, $2p+2$, $2p+3$ の 6 個の乗法生成元を得る．上と同様に，次数 $2p^2+1$ 以



下ではこれ以上生成元はなく，歪対称性のもの以外には新しい関係式はないことを示すことができる．（すなわち，次数 $2p^2$ 以下で多元環として

$$H^*(K(Z_p,3);Z_p)\cong Z_p[h,j,e']\otimes\Lambda(g,i,f')$$

ただし，e' と f' はそれぞれ e と f の転入像である．）

さらに，次のファイバー空間のスペクトル系列を考える：

$$*\xrightarrow{K(Z_p,3)}K(Z_p,4)$$

$$*\xrightarrow{K(Z_p,4)}K(Z_p,5)$$

…………………………

$$*\xrightarrow{K(Z_p,n-1)}K(Z_p,n)$$

われわれが求める生成元は転入的であり，これらは $H^*(K(Z_p,4);Z_p)$ へ写り，

ついで $H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,5)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ などへと写る．$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ において，これらは次数 $n, n+1, n+2p-2, n+2p-1, n+2p-1, n+2p$ の生成元になり，次数 $<n+4p-4$ ではそれ以外の生成元は存在しない．（規則的には，新しい生成元は，ファイバーの偶数次数の生成元の p 巾から転入で写される．$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,1)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ と同様，$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,2)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ には次数 2 の生成元があり，これらの p 巾は次数 $2p$ であり，これにより，$2p$ に近い次数の生成元が生まれた．さて，$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,3)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ における最初の偶数次数の生成元は次数 4 をもち，したがって，その p 巾は次数 $4p$ をもつ．$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ における生成元の次数はさらに大きい．したがって，次数 $<n+4p-4$ の新しい生成元はない．）

n が十分大きい $(n\geq 4p-4)$ ならば，これらの生成元の積は次数 $\geq n+4p-4$ であることに注意すべきである．したがって，$K(\boldsymbol{Z}_p,n)$ の mod p コホモロジー環は次数 $<n+4p-4$ までは，これ以上生成元をもたないばかりではなく，これ以外の元すらない．このようにして，次の定理を得る．（ただし，いくつかのギャップがあるが，これを埋めるのは読者に任せる．）

定理　$n\geq 3$ ならば，次数 $<n+4p-4$ において環 $H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ は次数 $n, n+1, n+2p-2, n+2p-1, n+2p-1, n+2p$ に生成元をもち，歪可換性以外の関係式をもたない多元環に同型である．

$n\geq 4p-4$ ならば，

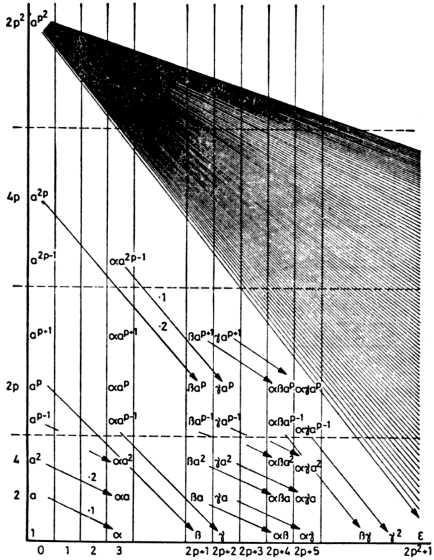
$$H^q(K(\boldsymbol{Z}_p,n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z}_p & q=0,n,n+1,n+2p-2,n+2p\ \text{のとき}\\ \boldsymbol{Z}_p\oplus\boldsymbol{Z}_p & q=n+2p-1\ \text{のとき}\\ 0 & \text{その他の}\ q<n+4p-4\ \text{について}\end{cases}$$

$H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ のこれ以上の計算は，例えば次の論文を参照されたい：M. M. Postnikov : On the H. Cartan Theorem, Uspechi Mat. Nauk 1966, V. 21, No. 4, pp. 35–46.

$H^*(K(\boldsymbol{Z},n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ の計算

この計算は上のものと同様である．すでにわかっているように，$K(\boldsymbol{Z},2)=\boldsymbol{CP}^\infty$ であり，したがって $H^*(K(\boldsymbol{Z},2)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)\cong\boldsymbol{Z}_p[a]$，ただし $\deg a=2$，である．（ある程度まではすでに調べているが）ファイバー空間 $*\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z},2)}K(\boldsymbol{Z},3)$ の mod p コホモロジー・スペクトル系列を考える．E_2 項と微分の作用は次の図

に示される：



これより，次数 $\leqq 2p^2$ において $H^*(K(\boldsymbol{Z},3);\boldsymbol{Z}_p)$ は多元環 $\boldsymbol{Z}_p[\gamma]\otimes\Lambda(\alpha,\beta)$ に同型，ただし $\deg\alpha=3$, $\deg\beta=2p+1$, $\deg\gamma=2p+2$, であることを得る．次数 2 に生成元がないため，$2p$ の近くの次数にこれ以上生成元が現われないので，計算もやさしくなることに注意する．ファイバー空間 $*\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z},3)}K(\boldsymbol{Z},4)$, $*\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z},4)}K(\boldsymbol{Z},5),\cdots$ などの mod p コホモロジー・スペクトル系列を調べるのは読者に任せたい．

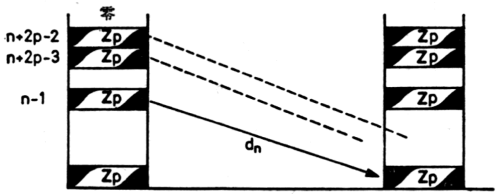
最終的な結果は次の通りである．

定理　$n\geqq 3$ ならば，次数 $<n+4p-4$ において環 $H^*(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Z}_p)$ は次数 $n, n+2p-2, n+2p-1$ に生成元をもち，歪可換性以外の関係式をもたない多元環に同型である．

$n\geqq 4p-4$ ならば，

$$H^q(K(\boldsymbol{Z},n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z}_p & q=0,n,n+2p-2,n+2p-1 \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他の } q<n+4p-4 \text{ について}\end{cases}$$

これらの結果を球面のホモトピー群に適用する．p は n に比較して小さく，n に等しくないとする．ファイバー空間 $S^n|_n \xrightarrow{K(\boldsymbol{Z},n-1)} S^n$ の mod p コホモロジー・スペクトル系列を考える．このとき，スペクトル系列は次の図



で与えられる．ただし，スペクトル系列は $\boldsymbol{Z}_p$ 上で考えている．$\tau=d_n$ は $E_n^{0,n-1}$ から $E_n^{n,0}$ への同型であることがわかっているから，次が成り立つ．

$$H^i(S^n|_n\,;\,\boldsymbol{Z}_p)\cong\begin{cases}0 & 0<i<n+2p-3 \text{ と } n+2p-2<i<n+4p-4 \text{ のとき}\\ \boldsymbol{Z}_p & i=0,i=n+2p-3,i=n+2p-2 \text{ のとき}\\ \text{何か} & i>n+4p-4 \text{ のとき}\end{cases}$$

特に，$H_{n+1}(S^n|_n\,;\,\boldsymbol{Z}_p)=0$，すなわち，$\pi_{n+1}(S^n)$ は位数が p で割り切れる直和因子は含まない．（すなわち，$\pi_{n+1}(S^n)$ の p 成分は零である．）

次のキリング空間 $S^n|_{n+2}$，すなわち，ファイバー空間

$$S^n|_{n+1}\xrightarrow{K(\pi,n)} S^n|_n$$

を考える．ただし，$\pi=\pi_{n+1}(S^n|_n)$ である．今，示したように，群 π は p で割り切れる位数の元を含まない，すなわち，$i>0$ について $H^i(K(\pi,n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)=0$ であるから，$H^*(S^n|_{n+1}\,;\,\boldsymbol{Z}_p)\cong H^*(S^n|_n\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ である．したがって $\pi_{n+2}(S^n)$ は位数が p で割り切れる元をもたないことがわかる．実際，一般に

$$H^k(X\,;\boldsymbol{Z}_p)\cong\mathrm{Hom}(H_k(X\,;\,\boldsymbol{Z}_p),\boldsymbol{Z}_p)$$

であるから，mod p コホモロジー群が消えることは，mod p ホモロジー群も零であることを意味する．

同様に，次数 $n+2p-3$ に届くまで計算を進めることができ，したがって次の結果を得る．

定理　任意の素数 p と任意の $0<i<2p-3$ について $\pi_{n+i}(S^n)\otimes\boldsymbol{Z}_p=0$, すなわち, これらのホモトピー群の p 成分は零である. ここで p は n に比べて小さい (もっと正確には, $n-1>2p-3$) と仮定する.

次に, $n>2p-3$ と仮定する. この場合 $\pi_{n+2p-3}(S^n)\otimes\boldsymbol{Z}_p\cong\boldsymbol{Z}_p$ である. 実際, $H^{n+2p-3}(S^n|_{n+2p-4}; \boldsymbol{Z}_p)\cong\boldsymbol{Z}_p$ である. ただし, この孤独な $\boldsymbol{Z}_p$ は, $H^{n+2p-2}(S^n|_{n+2p-4})$, すなわち, $H_{n+2p-3}(S^n|_{n+2p-4}; \boldsymbol{Z}_p)\cong\boldsymbol{Z}_p$ から来たものである. したがって, 定理は次の命題により完全になる.

命題　n に比べて小さい (すなわち, $n-1>2p-3$) 任意の素数 $p\neq 2$ について, $\pi_{n+2p-3}(S^n)\otimes\boldsymbol{Z}_p\cong\boldsymbol{Z}_p$ である.

このとき $\pi_{n+2p-3}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_{p^h}\oplus\cdots$ である. ただし, $\cdots$ の部分の直和因子は, p で割り切れない位数をもつ群である. 以下で, $h=1$, すなわち,

$$\pi_{n+2p-3}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_p\oplus\cdots$$

であることが証明される.

これは $p\neq 2$ について証明されただけであるが, 実は $\pi_{n+2\cdot 2-3}(S^n)\cong\pi_{n+1}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_2$ $(n\geq 3)$ であるので $p=2$ についても正しい. したがって, $\pi_{n+2p-3}(S^n)$ に関するこの関係式はすべての素数 p について成り立つ.

この結果を本書の末尾にあるホモトピー群の表と比較してほしい. $n\geq 5$ について $\pi_{n+3}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_{24}$ とある. $p=3$ とし, n は大きい (実は $n>4$ で十分) と仮定する. このとき, 定理により, $\pi_{n+1}(S^n)$ と $\pi_{n+2}(S^n)$ は, 表からもわかるように, $n\geq 3$ について $\pi_{n+1}(S^n)\cong\pi_{n+2}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_2$ であるので, 3 成分をもたない. さて, $2p-3=3$, したがって, $\pi_{n+3}(S^n)$ は直和因子 $\boldsymbol{Z}_3$ をもたなければならない. そして実際, $\pi_{n+3}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_{24}\cong\boldsymbol{Z}_3\oplus\boldsymbol{Z}_{2^3}$ である.

例えば, $p=5$ についてもう 1 つの例を考えよう. このとき $2p-3=7$, すなわち, 5 に比べて十分大きい n について, $i<7$ のとき等式 $\pi_{n+i}(S^n)\otimes\boldsymbol{Z}_5=0$ が成り立つ. 表では, 群

$$\pi_{n+1}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_2,\ n\geq 3; \qquad \pi_{n+2}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_2,\ n\geq 3;$$
$$\pi_{n+3}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_3\oplus\boldsymbol{Z}_{2^3},\ n\geq 5; \quad \pi_{n+4}(S^n)=0,\ n\geq 6;$$
$$\pi_{n+5}(S^n)\cong 0,\ n\geq 7; \qquad \pi_{n+6}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_2,\ n\geq 5$$

は 5 成分をもたないとあり, 一方

$$\pi_{n+7}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_{240}\cong\boldsymbol{Z}_5\oplus\boldsymbol{Z}_{48},\ n\geq 9$$

である.

第Ⅳ章　コホモロジー作用素

§26. 一　般　論

n と q は2つの整数，π と G は2つの可換群とする．(n, q, π, G) 型の**コホモロジー作用素** φ が与えられたというのは，任意のCW複体 X に対して次の図

$$\begin{array}{ccc} H^n(X;\pi) & \xrightarrow{\varphi_X} & H^q(X;G) \\ f^*\uparrow & & f^*\uparrow \\ H^n(Y;\pi) & \xrightarrow{\varphi_Y} & H^q(Y;G) \end{array}$$

が任意の写像 $f: X \to Y$ について可換であるという意味で**自然な**写像 φ_X: $H^n(X;\pi) \to H^q(X;G)$ が定義されているときである．

写像 φ_X は群準同型であるとは限らないことに注意する．誤解がなければ φ_X の代わりに φ と書く．

記号　G は可換群なので，(n, q, π, G) 型のすべてのコホモロジー作用素の族も可換である．これを $\mathcal{O}(n, q, \pi, G)$ と表わす．

定理　$\mathcal{O}(n, q, \pi, G) \cong H^q(K(\pi, n); G)$.

以下でわかるように，予期せぬほど美しいこの定理はほとんど明らかである．

証明　$H^n(X;\pi) \cong [X, K(\pi, n)]$ はすでにわかっている．この同型は基本コホモロジー類 $e \in H^n(K(\pi, n);\pi)$ を利用して証明される．すなわち，この対応は各写像 $f: X \to K(\pi, n)$（実際は，f にホモトープな写像の類）に元 $f^*(e) \in H^n(X;\pi)$ を対応させて得られる．すでに示されているように，$H^n(X;\pi)$

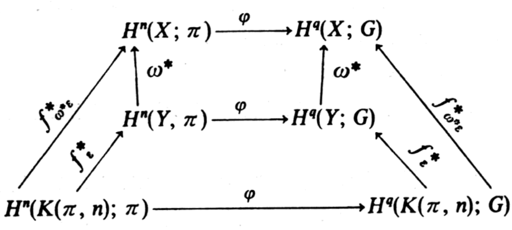
と $[X, K(\pi, n)]$ の間のこの対応は全単射である．今，コホモロジー作用素 $\varphi\in\mathcal{O}(n, q, \pi, G)$ が与えられたとする．このとき，特に，写像 $\varphi_{K(\pi,n)}: H^n(K(\pi, n)\,;\,\pi)\to H^q(K(\pi, n)\,;\,G)$ と元 $\varphi(e)\in H^q(K(\pi, n)\,;\,G)$ が得られる．すぐわかるように，$\varphi(e)$ という値は，一対一の関係で作用素 φ を決定する．すなわち，$\varphi(e)$ がわかると，すべての作用素を再構成できる．特に，$\varphi(e)\equiv 0$ は $\varphi\equiv 0$ を意味する．一方，任意の元 $x\in H^q(K(\pi, n)\,;\,G)$ は（一意的に定義される）作用素 $\varphi\in\mathcal{O}(n, q, \pi, G)$ により $\varphi(e)$ と表わすことができる．言いかえれば，φ に $\varphi(e)$ を対応させる準同型

$$\mathcal{O}(n, q, \pi, G)\to H^q(K(\pi, n)\,;\,G)$$

は同型であることを証明しよう．

まず最初に，これが単射準同型であることを証明する．X は任意の CW 複体，φ は $\varphi(e)=0$ を満たす作用素とし，$\alpha\in H^n(X\,;\,\pi)$ は任意の元とする．このとき，写像 $f: X\to K(\pi, n)$ が存在して $f^*(e)=\alpha$ となる．φ は自然であるから，$\varphi(\alpha)=\varphi f^*(e)=f^*\varphi(e)=0$，したがって，単射であることが得られる．

全射性を調べよう．x は $H^q(K(\pi, n)\,;\,G)$ の任意の元とする．$\varphi(e)=x$ とおき，1つの元 e 上で与えられたこの対応をコホモロジー作用素に拡張することを試みる．X は任意の CW 複体とし，$\gamma\in H^n(X\,;\,\pi)$ とする．このとき写像 $f_\gamma: X\to K(\pi, n)$ が存在して，$\gamma=f_\gamma^*(e)$ となる．そこで $\varphi: H^n(X\,;\,\pi)\to H^q(X\,;\,G)\Longleftrightarrow\varphi(\gamma)=f_\gamma^*(x)$ と定義する．写像 φ は定義したので，これが自然であることを証明するのが残る．空間 X, Y と写像 $\omega: X\to Y$ を考える．このとき次の図式を得る．中央にある正方形が可換であること，すなわち，任意の $\varepsilon\in$



$H^n(Y\,;\,\pi)$ に対して $\varphi(\omega^*\varepsilon)=\omega^*\varphi(\varepsilon)$ を証明しなければならない．φ の定義により，$\varphi(\omega^*\varepsilon)=f^*_{\omega^*\varepsilon}(x)$ かつ $\varphi(\varepsilon)=f^*_\varepsilon(x)$ である．したがって，$f^*_{\omega^*\varepsilon}(x)=\omega^*$

$f_\varepsilon^*(x)$，すなわち，$f_{\omega^*\varepsilon}^*(x)=(f_\varepsilon\circ\omega)^*(x)$ を証明すればよい．写像 $(f_\varepsilon\circ\omega)^*$ は e を $\omega^*(\varepsilon)$ に写し，一方，写像 $f_{\omega^*\varepsilon}$ の構成により $f_{\omega^*\varepsilon}^*(e)=\omega^*(e)$ である．このとき，$K(\pi,n)$ への写像に関する定理により写像 $f_\varepsilon\circ\omega:X\to K(\pi,n)$ と $f_{\omega^*\varepsilon}:X\to K(\pi,n)$ はホモトープ，すなわち，$(f_\varepsilon\circ\omega)^*=f_{\omega^*\varepsilon}^*$ であり，特に，$f_{\omega^*\varepsilon}^*(x)=\omega^*f_\varepsilon^*(x)$ である．（証明終）

系　自明でないコホモロジー作用素は決して次数を下げない．（すなわち，$0\neq\varphi\in\mathcal{O}(n,q,\pi,G)$ ならば $q\geq n$ である．）

実際，複体 $K(\pi,n)$ は構成法により小さい次元の胞体を含まないから，$q<n$ について $H^q(K(\pi,n);G)=0$ である．

注意　準同型でないコホモロジー作用素の例を1つ挙げておく．π は位数2の元をもたない可換環，n は偶数とする．各元を2乗するのは写像 φ: $H^n(X;\pi)\to H^{2n}(X;\pi)$ であり，これは明らかに準同型ではない．しかし，φ の自然性は，φ が $(n,2n,\pi,\pi)$ 型のコホモロジー作用素であることを意味する．$\pi=\boldsymbol{Z}_2$ ならば，もちろんこれは準同型である．

(1) すべての整数 n と q，すべての有限生成可換群 π に対して群 $H^q(K(\pi,n);\boldsymbol{Q})$ はすでにわかっている．この結果を，コホモロジー作用素の言葉で解釈することは可能である．

π が有限ならば，すべての $q>0$ について $H^q(K(\pi,n);\boldsymbol{Q})=0$ であり，したがって，有限群を係数にもつコホモロジーから有理係数のコホモロジーへの自明でないコホモロジー作用素は存在しない．

$\pi=\boldsymbol{Z}$ かつ n が奇数ならば，$H^q(K(\pi,n);\boldsymbol{Q})$ は $q=n$ について零と異なるだけであり，このとき $H^n(K(\pi,n);\boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Q}$ である．群 $H^n(K(\pi,n);\boldsymbol{Q})$ の生成元は，自然な埋込み $\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$ により誘導される準同型 $q:H^n(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Z})\to H^n(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Q})$ の下で基本類 $e\in H^n(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Z})$ の像である．したがって，奇数次数の整係数コホモロジーから有理係数へのコホモロジー作用素はすべて次数を保ち，任意の元 $\alpha\in H^n(X;\boldsymbol{Z})$ に元 $\lambda q(\alpha)\in H^n(X;\boldsymbol{Q})$ を対応させる．ただし，λ はこの作用素について定まった有理数である．最後に，n が偶数ならば，$H^*(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Q}[q(e)]$ である．したがって，偶数次数の整係数コホモロジーから有理係数のコホモロジーへの各作用素は任意の元 $\alpha\in H^n(X;\boldsymbol{Z})$ に元 $\lambda q(\alpha^k)\in H^{nk}(X;\boldsymbol{Q})$ を対応させる．ただし，k と λ はこ

の作用素に対して定まった整数と有理数である．

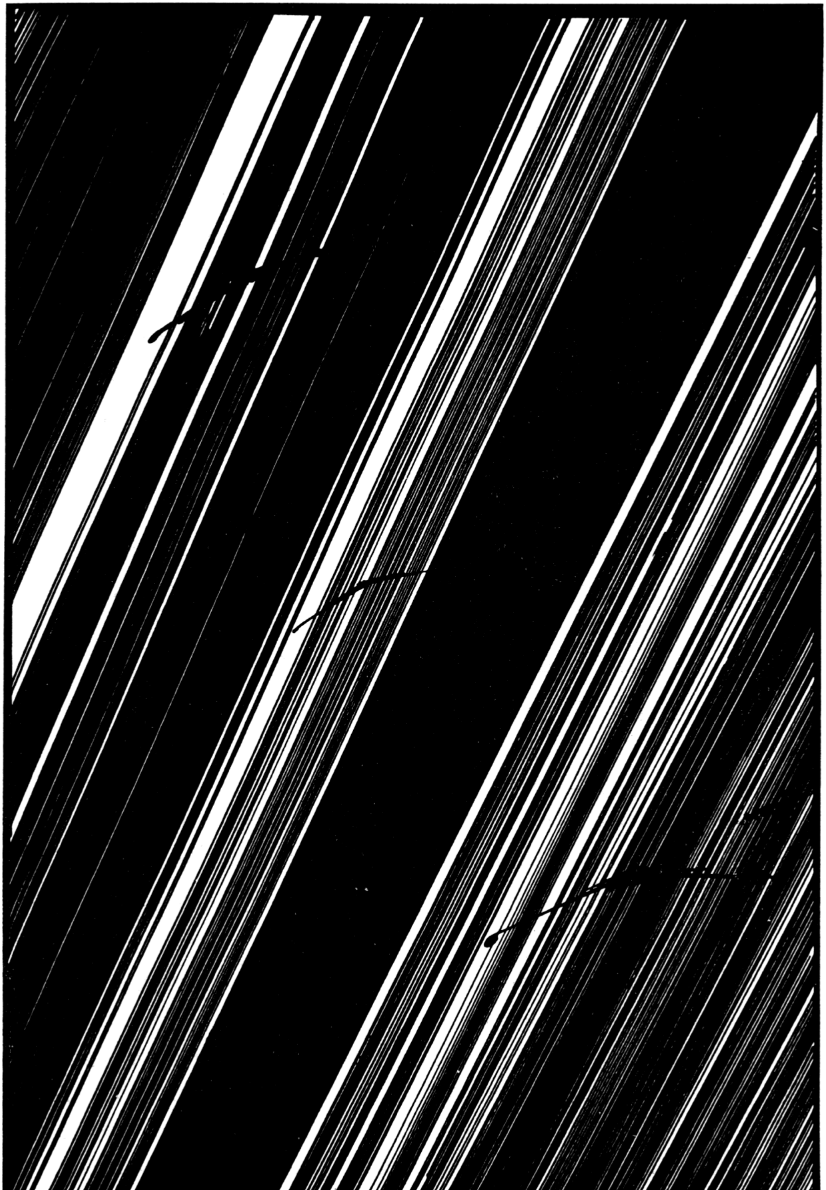
演習　標数 0 の任意の体 F に対して，F に係数をもつコホモロジーから F に係数をもつコホモロジーへの任意のコホモロジー作用素は，任意の元 $\alpha\in H^n(X;F)$ に元 $\lambda\alpha^k\in H^{nk}(X;F)$ を対応させることを証明せよ．ただし，k は整数，$\lambda\in F$ であり，いずれもこのコホモロジー作用素に対して定まる．

(2) さて，空間 $K(\boldsymbol{Z}_p,n)$ の mod p コホモロジーに関する結果をコホモロジー作用素の言葉で解釈しよう．

まず最初に，$H^n(K(\boldsymbol{Z}_p,n);\boldsymbol{Z}_p)\cong\boldsymbol{Z}_p$ であり，この群の任意の元は $ke, k\in\boldsymbol{Z}_p$，という形である．したがって，$\boldsymbol{Z}_p$ 係数のコホモロジーから $\boldsymbol{Z}_p$ 係数のコホモロジーへの次数を保つ任意の作用素は $\boldsymbol{Z}_p$ のスカラーを掛けることである．

さらに，$H^{n+1}(K(\boldsymbol{Z}_p,n);\boldsymbol{Z}_p)\cong\boldsymbol{Z}_p$ である．したがって，このとき各 n に対して，次数 n の mod p コホモロジーから次数 $n+1$ への ($\boldsymbol{Z}_p$ の乗数を除いて) 一意的なコホモロジー作用素が存在する．一方，このような例，すなわち，**Bockstein 準同型** β を構成するのは非常にやさしい．$\alpha\in H^n(X;\boldsymbol{Z}_p)$ に対して $\beta(\alpha)\in H^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}_p)$ は次のように定義されることを思いおこそう．元 α を表わす双対輪体 $a\in C^n(X;\boldsymbol{Z}_p)$ は値 $0,1,2,\cdots,p-1\in\boldsymbol{Z}_p$ をとる．これらを整数と考えると，双対鎖 $\tilde{a}\in C^n(X;\boldsymbol{Z})$ を得るが，この双対境界輪体 $\delta\tilde{a}$ は零 mod p，すなわち，p で割り切れる値のみをもつ．双対鎖 $\dfrac{1}{p}\delta\tilde{a}$ を考え，これを mod p に簡約して，元 $\beta(\alpha)\in H^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}_p)$ を表わす双対輪体を得る．Bockstein 準同型は明らかに $\mathcal{O}(n,n+1,\boldsymbol{Z}_p,\boldsymbol{Z}_p)$ の作用素を定義し，これは $n>0$ について自明でない．（例えば，X が 2 つの胞体 σ^n と σ^{n+1} で $[\sigma^{n+1}:\sigma^n]=p$ を満たすものから成る複体ならば，$\beta:H^n(X;\boldsymbol{Z}_p)\to H^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}_p)$ は同型である.）したがって，mod p コホモロジーから mod p コホモロジーへの次数を 1 上げる任意の作用素は $k\beta$ という形であると結論できる．ただし，β はBockstein 準同型で $k\in\boldsymbol{Z}_p$ である．構成法により任意の $\alpha\in H^n(X;\boldsymbol{Z}_p)$ に対して，$\beta(\alpha)$ は $H^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}_p)$ の整数元，すなわち，それは簡約準同型 $H^{n+1}(X;\boldsymbol{Z})\to H^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}_p)$ の像に属することに注意する．実際，(前節で)元 $d\in H^3(K(\boldsymbol{Z}_p,2);\boldsymbol{Z}_p)$ の整数性を証明するのにこの事実をすでに用いている．

$n+1<q<n+2p-2$ について $H^q(K(\boldsymbol{Z}_p,n);\boldsymbol{Z}_p)=0$ であるから，次数を $2,3,4,\cdots,2p-3$ 上げるコホモロジー作用素は存在しない．次数を $2p-2$ 上げ



るコホモロジー作用素は(乗数を除いて)一意的にある. 実際, $n>p$ について

$$\mathcal{O}(n, n+2p-2, \boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Z}_p) \cong H^{n+2p-2}(K(\boldsymbol{Z}_p, n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p) \cong \boldsymbol{Z}_p$$

である. これは **Steenrod 巾作用素**とよばれ $\mathscr{P}^1$ (ときには St^{2p-2}) と表わされる. また ($n>4p-5$ について), $H^{n+2p-1}(K(\boldsymbol{Z}_p, n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p) \cong \boldsymbol{Z}_p \oplus \boldsymbol{Z}_p$, $H^{n+2p}(K(\boldsymbol{Z}_p, n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p) \cong \boldsymbol{Z}_p$, かつ $2p<q<4p-4$ について $H^{n+q}(K(\boldsymbol{Z}_p, n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)=0$ であることもわかっている. $\mathcal{O}(n, n+2p-1, \boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Z}_p) \cong \boldsymbol{Z}_p \oplus \boldsymbol{Z}_p$ と $\mathcal{O}(n, n+2p, \boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Z}_p) \cong \boldsymbol{Z}_p$ の生成元はまったく新しい作用素ではなくて, それぞれ $\beta\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^1\beta$ および $\beta\mathscr{P}^1\beta$ により生成されていることがわかる. 次数を $2p+1, 2p+2, \cdots, 4p-5$ 上げるコホモロジー作用素は存在しない. しかし次数を $4p-4$ 上げる作用素は存在し, これは $\mathscr{P}^2$ で表わされる. §28 において, $\mathcal{O}(n, q, \boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Z}_p)$ のコホモロジー作用素の完全な分類を, $p=2$ の場合の証明も含めて与える.

§27. 安定作用素

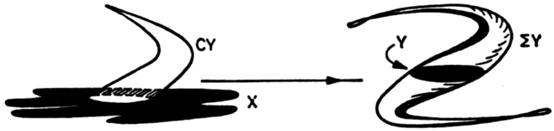
π に係数をもつコホモロジーから G に係数をもつコホモロジーへの次数を q 上げる**安定コホモロジー作用素**とは, $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して定義されたコホモロジー作用素 $\varphi_n \in \mathcal{O}(n, n+q, \pi, G)$ の系列で, 任意の複体 X と自然数 n について次の図は可換であるものをいう. (ここで Σ は懸垂同型を表わす.)

$$\begin{array}{ccc} H^n(X\,;\,\pi) & \xrightarrow{\Sigma} & H^{n+1}(\Sigma X\,;\,\pi) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} \\ H^{n+q}(X\,;\,G) & \xrightarrow{\Sigma} & H^{n+q+1}(\Sigma X\,;\,G) \end{array}$$

定理　任意の安定コホモロジー作用素は CW 対の完全系列と可換である. すなわち, 任意の CW 対 (X, Y) に対して, 次の図は可換である:

$$\begin{array}{ccccccccc} \to H^n(X\,;\,\pi) & \xrightarrow{i^*} & H^n(Y\,;\,\pi) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(X/Y\,;\,\pi) & \xrightarrow{j^*} & H^{n+1}(X\,;\,\pi) \to \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{n+1}} \\ \to H^{n+q}(X\,;\,G) & \xrightarrow{i^*} & H^{n+q}(Y\,;\,G) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+q+1}(X/Y\,;\,G) & \xrightarrow{j^*} & H^{n+q+1}(X\,;\,G) \to \end{array}$$

証明　i^* と j^* を含む正方形は, コホモロジー作用素の自然性により可換である. 双対境界準同型 δ を含む正方形の可換性を調べることが残っている. (X, Y) はコファイバー空間であるから, $X/Y \simeq X \cup CY/CY \simeq X \cup CY$ である. 写像 $f: X \cup CY \to \Sigma Y$ ($X \cup CY \to X \cup CY/X = \Sigma Y$) により誘導される準同型 $f^*: H^{n+1}(\Sigma Y\,;\,\pi) \to H^{n+1}(X/Y\,;\,\pi)$ を考える. 次の図式は反可換, すなわち,



$f^*\circ\Sigma=-\delta$ であることを示す．元 $\zeta\in H^n(Y;\pi)$ をとり，ζ を表わす胞体双対

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y;\pi) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(X,Y;\pi) \\ \downarrow \Sigma & & \downarrow (\cong) \\ H^{n+1}(\Sigma Y;\pi) & \xrightarrow{f^*} & H^{n+1}(X\cup CY;\pi) \end{array}$$

輪体 z を選ぶ．Y の胞体上では z と同じ値をとり，$X\backslash Y$ の胞体上では消える双対輪体 $\bar{z}\in\mathscr{C}^n(X;\pi)$ を考える．$i^\#\delta\bar{z}=0$ であるから，双対鎖 $\delta\bar{z}$ は $X \bmod Y$ の相対双対輪体であり，$H^{n+1}(X,Y;\pi)$ において $\delta\zeta$ に等しい元を定義する．双対鎖 $\overline{\delta\bar{z}}\in\mathscr{C}^{n+1}(X\cup CY;\pi)$ は CY の胞体上では消える $\delta\bar{z}$ の $X\cup CY$ への拡張として定義されたとする．実はこれが $H^{n+1}(X\cup CY;\pi)$ において $\delta\zeta$ を表わす双対輪体である．次に，正方形の図式の他の2辺に沿って進む．ここで ΣY の胞体は Y の胞体上の懸垂であることを思いおこそう．双対鎖 $\Sigma\bar{z}$ は，胞体 $\Sigma\sigma$ の上で胞体 σ 上の $\bar{z}$ と同じ値をとる．最後に，類 $f^*\Sigma\zeta$ を表わす双対鎖 $f^\sharp\Sigma z\in\mathscr{C}^{n+1}(X\cup CY;\pi)$ は $X\subset X\cup CY$ のすべての胞体上で零であり，$\sigma\subset Y$ 上の CY の胞体上では $\bar{z}(\sigma)$ に等しい．双対鎖 $f^\sharp\Sigma z$ と $\overline{\delta\bar{z}}$ を比較することが残っている．$Y\subset X\cup CY$ の上で z と一致し，$(X\cup CY)\backslash Y$ の胞体上で消える双対鎖 $\bar{\bar{z}}\in\mathscr{C}^n(X\cup CY;\pi)$ を考える．明らかに，$\delta\bar{\bar{z}}=\overline{\delta\bar{z}}+f^\sharp\Sigma z$ であり，したがって，$\delta\zeta+f^*\Sigma\zeta=0$．よって，$\delta=-f^*\circ\Sigma$ である．

さて，安定作用素 φ は Σ および f^* と可換であり，したがって，境界準同型 $\delta=-f^*\circ\Sigma$ とも可換である． （証明終）

この定理の重要な系は安定作用素の転入性である．すなわち，φ は安定作用素，(E,B,F,p) は単連結な底空間をもつファイバー空間とし，$\alpha\in H^r(F;G)=E^{0,r}$ は転入的な元，すなわち，$d_3\alpha=\cdots=d_r\alpha=0$ と仮定するとき，元 $\varphi(\alpha)\in H^{r+q}(F;G)=E_2^{0,r+q}$ も転入的，すなわち，$d_3\varphi(\alpha)=\cdots=d_{r+q}\varphi(\alpha)=0$ である．さらに，もし $\tau(\alpha)=d_{r+1}(\alpha)\in E_{r+1}^{r+1,0}=H^{r+1}(B;\pi)/\bigoplus_{s\leq r}\mathrm{Im}\,d_s$ が $\beta\in H^{r+1}(B;\pi)$ を含むならば，$\tau(\varphi\alpha)$ は $\varphi(\beta)\in H^{r+q+1}(B;G)$ を含む．(「転入 τ は作用素 φ と可

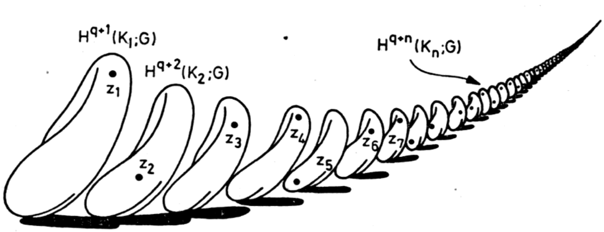
換である」と言ってもよい．この表現は正確ではないがゴロが良い．）これは転入 τ が合成 $H^r(F;\pi)\xrightarrow{\delta}H^{r+1}(E,F;\pi)\xrightarrow{(p^*)^{-1}}H^{r+1}(B;\pi)$（そして係数として π の代わりに G をもつときも同じ）として表わせることと φ は δ および p^* と可換であるという事実から直ちにわかる．実際，$\delta\alpha\in\mathrm{Im}\,p^*$，すなわち，$\delta\alpha=p^*\beta$ ならば，$\delta(\varphi\alpha)=\varphi(\delta\alpha)=\varphi(p^*\beta)=p^*(\varphi\beta)$ であるから，$\delta(\varphi\alpha)$ は $\mathrm{Im}\,p^*$ に属する．

安定作用素の群と $K(\pi,n)$ のコホモロジー群との間の関連を調べよう．$e\in H^n(K(\pi,n);\pi)$ は基本類とする．このとき，$\Sigma e\in H^{n+1}(\Sigma K(\pi,n);\pi)$ は写像 $f_n:\Sigma K(\pi,n)\to K(\pi,n+1)$ を与える．（ここで $K(\pi,n)=\Omega K(\pi,n+1)$ であることを思いおこす．写像 $f_n:\Sigma K(\pi,n)=\Sigma\Omega K(\pi,n+1)\to K(\pi,n+1)$ は $f_n(\varphi,t)=\varphi(t)$ により定義される．ただし，φ は $K(\pi,n+1)$ 上のループ，すなわち，$\varphi(t)\in K(\pi,n+1)$，$t\in[0,1]$ である．）したがって，$e\in H^n(K(\pi,n);\pi)$ と $e'\in H^{n+1}(K(\pi,n+1);\pi)$ が基本類ならば，$f_n^*(e')=\Sigma e$ である．

安定作用素 φ を考え，基本類 e にこれを施して $\varphi(e)\in H^{n+q}(K(\pi,n);G)$ を得る．φ は安定作用素であるから，$\varphi(\Sigma e)=\Sigma(\varphi e)\in H^{n+q+1}(\Sigma K(\pi,n);G)$ である．さて，準同型 f_n^* は e' を Σe に写すから，$\varphi(e')\in H^{n+q+1}(K(\pi,n+1);G)$ は $\varphi(\Sigma e)$ に写される．$H^{n+q}(K(\pi,n);G)\cong H^{n+q+1}(\Sigma K(\pi,n);G)$ であるから，準同型 $f_n^*:H^*(K(\pi,n+1);G)\to H^*(\Sigma K(\pi,n);G)$ は次数を１下げる準同型 $H^{n+q+1}(K(\pi,n+1);G)\to H^{n+q}(K(\pi,n);G)$ とみなしてよい．したがって，次の系列を得る：

$$\cdots\to H^{n+q}(K(\pi,n);G)\to\cdots\to H^{q+2}(K(\pi,2);G)\to H^{q+1}(K(\pi,1);G)$$

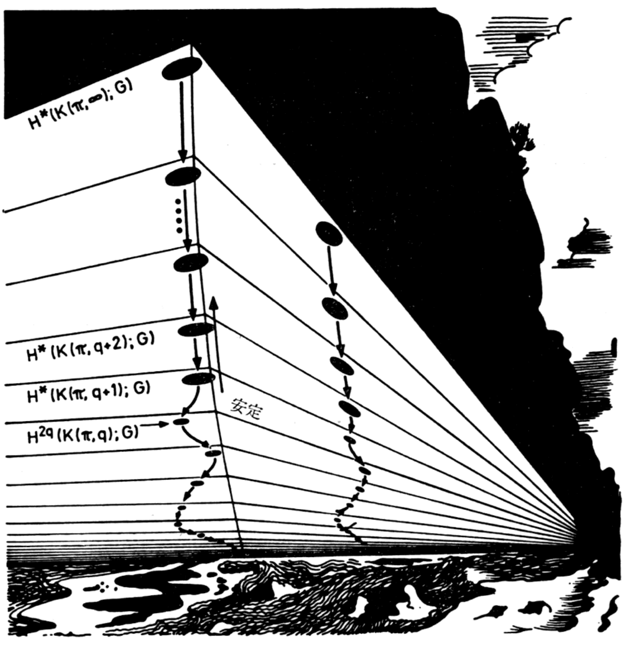
ただし，各矢印は f_n^* である．安定作用素 φ を与えると，任意の n について各 $H^{n+q}(K(\pi,n);G)$ のある元 z_n が与えられ，準同型 f_s^* は $H^{s+q+1}(K(\pi,s);G)$ の元 z_{s+1} を $H^{s+q}(K(\pi,s);G)$ の元 z_s に写す．コホモロジー作用素の系列を定



義することは各群 $H^{n+q}(K(\pi,n)\,;G)$ に1つの元を任意に選ぶことと同じである．しかし，コホモロジー作用素の任意の系列に対して系列 $\{z_n\}$ の項の間には何ら関係はない．

これで，作用素の系列の中で安定コホモロジー作用素を識別する条件を得たことになる．すなわち，系列 $\{z_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ は条件 $z_n=f_n^*z_{n+1}$，すなわち，$z_1=f_1^*z_2, z_2=f_2^*z_3, \cdots$ を満たさなければならない．この結果を定式化しよう．





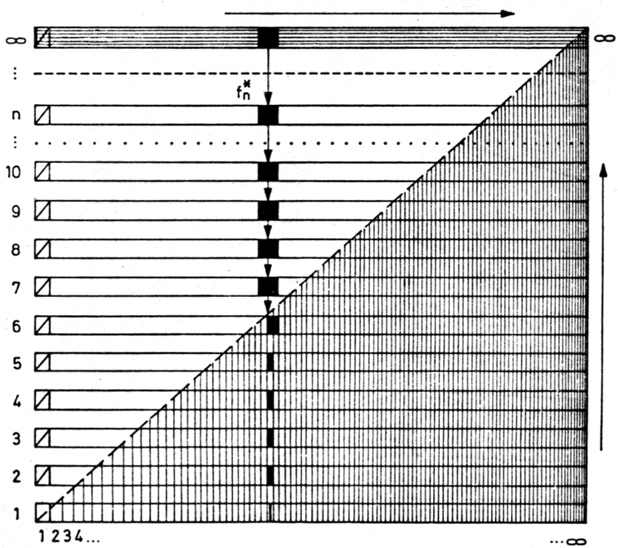
定理　次数を q 上げるすべての安定コホモロジー作用素の群 $\mathcal{O}^S(q,\pi,G)$ は群 $H^{q+n}(K(\pi,n)\,;G)$ と準同型 f_n^* の系列の射影的極限に同型である．

任意の $z_s\in H^{q+s}(K(\pi,s)\,;G)$ が与えられると，すべての $z_k, k<s$, は自動的に定義されること，すなわち，$z_k=f_k^*f_{k+1}^*\cdots f_{s-2}^*f_{s-1}^*(z_s)$ に注意しよう．したがって，次数 $\leq N$ の元の上での安定作用素の作用にのみ関心があるのであれば，唯１つの元 $z_N\in H^{N+q}(K(\pi,N)\,;G)$ を与えることにより，この作用素を与えることができる．

一方，$K(\pi,n)$ は $(n-1)$ 連結であるので，$f_{n+1}^*:H^{n+q+1}(K(\pi,n+1)\,;G)\to H^{n+q}(K(\pi,n)\,;G)$ は $n>q$ について同型である．言いかえれば，n が増加するにつれて各群 $H^{q+n}(K(\pi,n)\,;G)$ は安定化する，すなわち，ある N で変化が止まる．したがって，十分大きい N（すなわち $N>q$）について，

$$\mathcal{O}^S(q,\pi,G)=H^{N+q}(K(\pi,N)\,;G)$$

である．この結果をもっとよく説明する図がある：



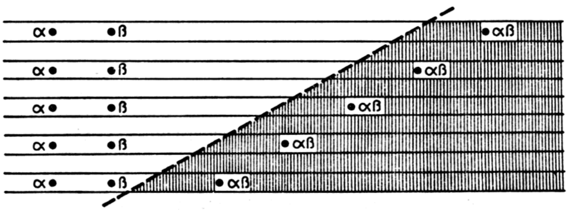
ここで，各列は，一番上のものを除いて，G に係数をもつ $K(\pi,n)$ のコホモロ

ジーを含む $(n=1, 2, 3, \cdots)$. 各列の左の端には（0次のものではなく）n 次コホモロジー群がある．したがって，各列の下の群は異なる次数である．一方，準同型 f_n^* は縦の矢印で表わされている．図の影のついていない半分では，これらすべての準同型は同型，すなわち，各々縦の線上で群は同一である．最上列は $\mathcal{O}^S(q, \pi, G)$ に同型なこれらの群から成り，これを $H^{\infty+q}(K(\pi, \infty); G)$ で表わすことにするが，これは(とにかく，自然な意味で)何らかの空間のコホモロジー群というわけではない．

群 $H^{n+q}(K(\pi, n); G)$ は $q<n$ ならば**安定次数**をもつ(あるいは単に**安定である**)，$q \geq n$ ならば**非安定次数**をもつ(あるいは単に**非安定である**)といわれる．上の図では非安定次数の群には影が付けられている．

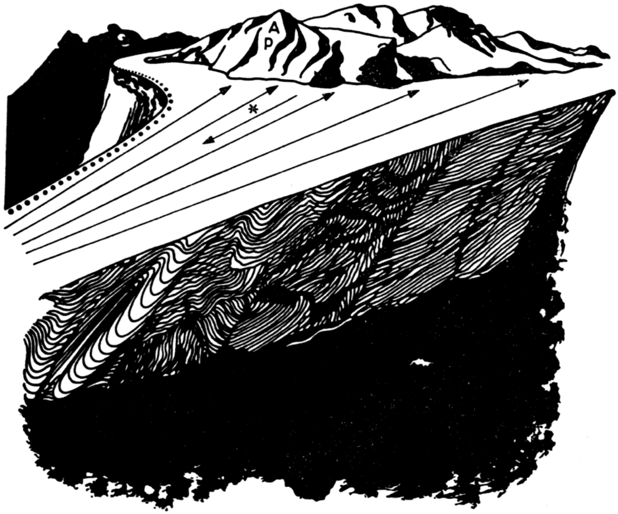
Steenrod 代数

準同型 $f_n^*: H^*(K(\pi, n); G) \to H^*(K(\pi, n-1); G)$ は乗法的でないから，$H^*(K(\pi, n); G)$ の乗法構造は $\oplus_q \mathcal{O}^S(q, \pi, G)$ に同様な構造を誘導しない．これは，次数を保たないこと，特に任意の $\alpha, \beta \in H^*(K(\pi, n); G)$ に対して，$\deg(f_n^* \alpha f_n^* \beta) = \deg f_n^*(\alpha\beta) - 1$ であることを単に認めれば容易にわかる．



さらに，上図が示すように，$\alpha, \beta \in H^*(K(\pi, n); G)$ が安定次数をもっても $\alpha\beta$ は非安定次数をもつこともある．しかしながら，$\pi = G$ の場合は $\oplus_q \mathcal{O}^S(q, \pi, G)$ に環構造を与えるもう1つの可能性がある．実際，任意の対 $\varphi' \in \mathcal{O}^S(q', G, G)$, $\varphi'' \in \mathcal{O}^S(q'', G, G)$ に対して，合成 $\varphi' \circ \varphi'' \in \mathcal{O}^S(q'+q'', G, G)$ を考えればよく，これは再び安定作用素である．この合成で定義される積により $\oplus_q \mathcal{O}^S(q, G, G)$ は結合的な(非可換)環になる．

$G = \pi = \boldsymbol{Z}_p$ ならば，この環もまた $\boldsymbol{Z}_p$-多元環である．これを $\mathscr{A}_p$ と表わし，



Steenrod 代数という．次節の大部分で，この Steenrod 代数 $\mathscr{A}_p$，特に $p=2$ の場合の完全な考察を行なうことにする．

§ 28. Steenrod 平方(作用素)

次に，Steenrod 平方(作用素) とよばれる Steenrod 代数 $\mathscr{A}_2$ のある特別な元を構成し考察しよう．

Steenrod 平方は，加法的準同型である安定コホモロジー作用素

$$Sq^i : H^n(X ; \boldsymbol{Z}_2) \to H^{n+i}(X ; \boldsymbol{Z}_2)$$

(したがって，$Sq^i \in H^{n+i}(K(\boldsymbol{Z}_2, n) ; \boldsymbol{Z}_2)$) であり，これはすべての $i \geq 0$ について定義されて，次の性質をもつ：

(1)
$$Sq^i(\alpha) = \begin{cases} 0 & i > \deg \alpha \text{ のとき} \\ \alpha^2 & i = \deg \alpha \text{ のとき} \\ \alpha & i = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

(2) (Cartan 公式)　$Sq^i(\alpha\beta) = \sum_{p+q=i} Sq^p(\alpha) \cdot Sq^q(\beta)$

注意　形式的級数 $Sq = Sq^0 + Sq^1 + \cdots + Sq^i + \cdots$ を考えるとき，条件 (2) は次

の形に書くことができる：

$$Sq(\alpha\beta)=Sq(\alpha)Sq(\beta),$$

すなわち，Sq は環準同型 $H^*(X;\boldsymbol{Z}_2)\to H^*(X;\boldsymbol{Z}_2)$ である．また条件 (1) は次の形に書ける：α が次数 k の同次な元ならば，

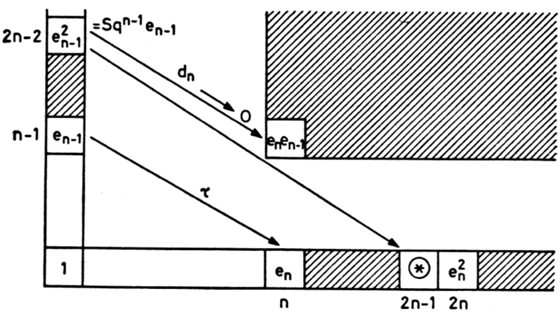
$$Sq(\alpha)=\alpha+Sq^1(\alpha)+\cdots+Sq^{(k-1)}(\alpha)+\alpha^2.$$

Sq^i の存在性と一意性の定理

条件 (1), (2) を満たす安定コホモロジー作用素の存在性と一意性を証明する．一意性は実際，安定性と (1) から出る．したがって，Cartan 公式はこれらの結果なのである．

基本類 $e_n\in H^n(K(\boldsymbol{Z}_2,n);\boldsymbol{Z}_2)$ を考える．まず $i>n$ について $Sq^i(e_n)=0$ とおく．次に $Sq^1(e_n), Sq^2(e_n), \cdots, Sq^{n-1}(e_n), Sq^n(e_n)$ を定義したい．$Sq^n(e_n)=e_n^2$ とおく．なぜ $e_n^2\neq0$ なのか？　理由は，少なくとも1つ CW 複体 X と元 $0\neq x\in H^n(X;\boldsymbol{Z}_2)$ が存在して $x^2\neq0$ を満たすからである．（例えば，$X=\boldsymbol{RP}^n$ ととればよい．このとき，さらに巾 $e_n^k, k\geq1$, はすべて零と異なる．）

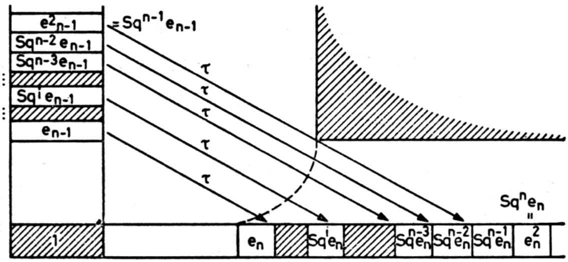
次に $Sq^{n-1}(e_n)$ を定義しよう．ファイバー空間 $*\simeq E\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z}_2,n-1)}K(\boldsymbol{Z}_2,n)$ を考える．（$n\leq1$ ならば $K(\boldsymbol{Z}_2,n-1)$ は存在しないから）ここで $n>1$ と仮定する．このコホモロジー・スペクトル系列の E_2 項については次が成り立つ：



この図の第零列の e_{n-1}^2 より下の各元は転入的であることがわかる．微分 $d_n: E_n^{0,2n-2}\to E_n^{n,n-1}$ は必ずしも自明ではないから，次元の考慮だけからは e_{n-1}^2

の転入性は出ない．しかし，$\boldsymbol{Z}_2$ 係数なので $d_n(e_{n-1}^2)=2d_n(e_{n-1})e_{n-1}=2e_ne_{n-1}=0$ である．（もう一つの証明：$E_n^{n,n-1}=E_2^{n,n-1}\cong\boldsymbol{Z}_2$ であり，e_ne_{n-1} は $d_n(e_ne_{n-1})=e_n^2\neq 0$ の像には入っていない．）したがって，$e_{n-1}^2=Sq^{n-1}e_{n-1}$ は転入的であり，これは転入により自明でない元 $f\in E_{2n-1}^{2n-1,0}$ に写される．（実際，この元が消えるための最後の可能性として残ったのだから，これは成立しなければならない．）ここで，$E_{2n-1}^{2n-1,0}=E_2^{2n-1,0}\cong H^{2n-1}(K(\boldsymbol{Z}_2,n);\boldsymbol{Z}_2)$ により $0\neq f\in H^{2n-1}(K(\boldsymbol{Z}_2,n);\boldsymbol{Z}_2)$ としてよい．$Sq^{n-1}(e_n)=f$ とおく．このようにして，各 $n>1$ について $Sq^{n-1}(e_n)$ を定義したことになる．

残っている $Sq^{n-k}(e_n)$ の構成は非常に容易である．$n>2$ とする．このとき $Sq^{n-2}(e_{n-1})$ はすでに定義され，スペクトル系列の群 $E_2^{0,2n-3}$ に属している．明らかに，この元は転入的で，転入により $E_2^{2n-2,0}=H^{2n-2}(K(\boldsymbol{Z}_2,n);\boldsymbol{Z}_2)$ のある零でない元に写される．そこで作用素 Sq^{n-2} の e_n 上の値としてこの元を選ぶ．したがって，$n>2$ について $Sq^{n-2}e_n$ を定義したことになる．さて逆向きに進んで，各 $n>3$ について，$Sq^{n-3}(e_n)$ を転入による $Sq^{n-3}(e_{n-1})$ の像として



定義し，これを続けて最後に $Sq^1(e_n)$ に届くまで行なう．

これで各 $n>k>0$ について $Sq^{n-k}e_n\in H^{2n-k}(K(\boldsymbol{Z}_2,n);\boldsymbol{Z}_2)$ を得る．（すなわち，$k>0$ と $n>0$ について Sq^ke_n を定義したことになる．）安定作用素を構成するには，元 $Sq^k(e_n)\in H^{n+k}(K(\boldsymbol{Z}_2,n);\boldsymbol{Z}_2)$ は各 n について等式

$$f_n^*(Sq^ke_n)=Sq^ke_{n-1}$$

を満たさねばならない．これを証明しよう．

(1) $k\geq n+1$ のときは，両辺とも零であるから等式は明らかである．

(2) $k\leq n-1$ とする．帰納法により

$$f_n^*: H^*(K(\boldsymbol{Z}_2, n); \boldsymbol{Z}_2) \to H^*(K(\boldsymbol{Z}_2, n-1); \boldsymbol{Z}_2)$$

は，$\Sigma K(\boldsymbol{Z}_2, n-1) = \Sigma\Omega K(\boldsymbol{Z}_2, n) \to K(\boldsymbol{Z}_2, n)$ により誘導される写像と懸垂同型の合成である．§21 において，これはファイバー空間 $* \xrightarrow{K(\boldsymbol{Z}_2, n-1)} K(\boldsymbol{Z}_2, n)$ における転入 τ の逆写像であることが示されている．さて，構成法により $k \leq n-1$ について $\tau(Sq^k e_{n-1}) = Sq^k e_n$ であるから，要求通り $f_n^*(Sq^k e_n) = Sq^k e_{n-1}$ である．

(3) $k=n$ とする．このとき $Sq^k e_{n-1} = 0$ であるから，$f_k^*(Sq^k e_k) = f_k^* e_k^2 = 0$ を示さなければならない．もう一度，f_k^* は合成 $H^*(K(\boldsymbol{Z}_2, n); \boldsymbol{Z}_2) \to H^*(\Sigma K(\boldsymbol{Z}_2, n-1); \boldsymbol{Z}_2) \to H^*(K(\boldsymbol{Z}_2, n-1); \boldsymbol{Z}_2)$ であることを思いおこそう．ただし，最初の準同型は写像により誘導されている．これは e_k を Σe_{k-1} に，したがって e_k^2 を $(\Sigma e_{k-1})^2$ に写すので，$(\Sigma e_{k-1})^2 = 0$ を示せば証明は完成する．実際，これは初等的な考察から出る．

補題　任意の懸垂空間において，コホモロジーの積は自明である．すなわち，任意の $\alpha \in H^p(\Sigma X; A)$, $p>0$, $\beta \in H^q(\Sigma X; A)$, $q>0$ および任意の環 A に対して，$\alpha\beta = 0$ である．

明らかに，対角写像 $\Sigma X \to \Sigma X \times \Sigma X$ は合成 $\Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X \to \Sigma X \times \Sigma X$（ただし，最初の写像は§2で定義されており，2番目は自然な埋込み）にホモトープである．このホモトピーを構成すること，および，それを利用して補題を証明することは読者に任せる．

(1) を満たす安定作用素 Sq^i の存在性の証明を終えるには，各 n について $Sq^0 e_n = e_n$ とおくことが残っている．実際は，等式 $Sq^n e_n = e_n^2$ と作用素 Sq^k の転入性を用いて元 $Sq^k e_n$ を構成したというより計算したので，このような作用素の一意性をも証明したのである．

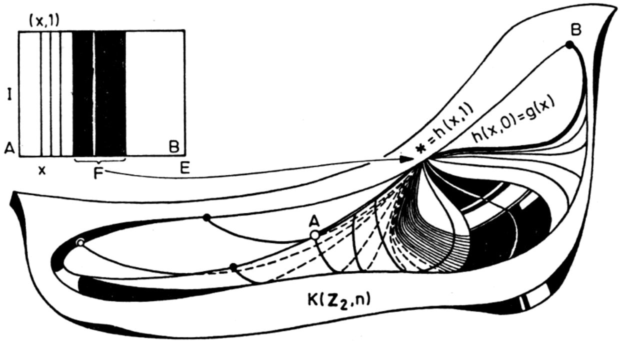
Cartan 公式は少し後で証明する．

Sq^i の転入性の直接証明をここで紹介しておくべきであると思う．その必要がないと思う読者は Cartan 公式の証明の所までとばして読んでもよい．

任意の Serre ファイバー空間 $p: E \xrightarrow{F} B$ を考え，元 $b \in H^n(B; \boldsymbol{Z}_2)$ を選ぶ．このとき写像 $f: B \to K(\boldsymbol{Z}_2, n)$ が存在して $b = f^*(e_n)$ を満たす．この写像をファイバー空間の写像 $E \to E(K)$ にリフトしたい．明らかに，これはいつもできるとは限らないが，ここではある元 $a \in H^{n-1}(F; \boldsymbol{Z}_2)$ の転入 τ による像である剰余類 $\bar{b} \in H^n(B; \boldsymbol{Z}_2)/\Sigma \operatorname{Im} d_s$ を b が表わす場合が必要なだけである．

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E(K) \\ \Big\downarrow F & \dashrightarrow & \Big\downarrow \quad K(\mathbf{Z}_2, n-1) \\ B & \xrightarrow{f} & K(\mathbf{Z}_2, n) \end{array}$$

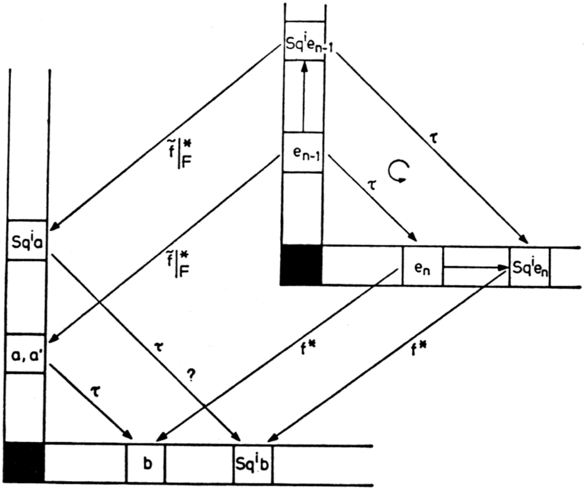
$\bar{b}=\tau(a)$ であるから，$H^n(E\,;\boldsymbol{Z}_2)$ において $p^*(b)=0$ である．合成写像 $g=f\circ p: E\to K(\boldsymbol{Z}_2, n)$ は $g^*(e_n)=(f\circ p)^*(e_n)=p^*(b)=0$ を満たす．すなわち，$h: E\times I\to K(\boldsymbol{Z}_2, n)$ が存在して $h|_{E\times 0}=g$ かつ $h(E\times 1)=*\in K(\boldsymbol{Z}_2, n)$ であるので，g は零ホモトープである．$E(K)$ は点 $*$ を出発する道の空間なので，したがって，問題は各点 $x\in E$ に $*=h(E\times 1)$ から出発する $K(\boldsymbol{Z}_2, n)$ における道を対応させることであり，これは容易である．すなわち，$\tilde{f}: E\to E(K) \Longleftrightarrow \tilde{f}(x)=h(x\times I)$ と定義すればよい．



このとき明らかに，次の可換な図がある：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E(K)\simeq * \\ p\Big\downarrow F & & p'\Big\downarrow K(\boldsymbol{Z}_2, n-1) \\ B & \xrightarrow{f} & K(\boldsymbol{Z}_2, n) \end{array}$$

実際，$p'\tilde{f}(x)=h(x,0)=g(x)=fp(x)$ である．このとき，2つのスペクトル系列の間の準同型が誘導される．



ここで，$f^*(e_n)=b$，したがって $f^*Sq^i(e_n)=Sq^i f^*(e_n)=Sq^i(b)$，また $\tau(e_{n-1})=e_n$ であり，普遍ファイバー空間において Sq^i は構成により τ と可換であるから，$\tau Sq^i(e_{n-1})=Sq^i(e_n)$ である．この準同型 $(\tilde{f}|_F)^*$ は e_{n-1} をある元 $a'\in H^{n-1}(F;\boldsymbol{Z}_2)$ に写す．ただし，$\tau(a')=f^*\tau(e_{n-1})=f^*(e_n)=b$ である．同じことは $a\in H^{n-1}(F;\boldsymbol{Z}_2)$ についても成り立つ．もし a' と a が等しければ，証明は次のように簡単に終わる：

$$\tau(Sq^i a)=f^*(\tau(Sq^i e_{n-1}))=f^*(Sq^i e_n)=Sq^i f^*(e_n)=Sq^i(b)$$

しかし，一般に $a'=a$ は正しくない．しかしながら，$\tilde{f}$ の構成法において残っている自由性を適当に用いてこれを得ることができる．

任意の写像 $\varphi:E\to\Omega K(\boldsymbol{Z}_2,n)=K(\boldsymbol{Z}_2,n-1)$ を考える．各 $x\in E$ について，$*\in K(\boldsymbol{Z}_2,n)$ を出発し，$f(x)\in K(\boldsymbol{Z}_2,n)$ で終わる道 $\tilde{f}(x)$ に，$*\in K(\boldsymbol{Z}_2,n)$ に頂点をもつループ $\varphi(x)$ を付け加えて写像 $\tilde{f}':E\to E(K)$ を定義する．明らかに，$\tilde{f}'$ は連続であり $\tilde{f}$ より決して悪くはない．（すなわち，構成において $\tilde{f}$ の代わりに代入してよい．）このとき，次式を確かめることができる：

$$(\tilde{f}'|_F)^*(e_{n-1})=(\tilde{f}|_F)^*(e_{n-1})+i^*\varphi^*(e_{n-1})$$

ただし，$i:F\to E$ はファイバーの全空間への射入である．さて，$(\tilde{f}|_F)^*(e_{n-1})$



$=a'$ であり，一方 $\varphi^*(e_{n-1})\in H^{n-1}(E\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ は写像 $\varphi: E\to K(\boldsymbol{Z}_2, n-1)$ を適当に選ぶことにより $H^{n-1}(E\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ の任意の元としてよい．$\tau(a-a')=0$ であるから，$a-a'\in H^{n-1}(F\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ は準同型 $i^*: H^{n-1}(E\,;\,\boldsymbol{Z}_2)\to H^{n-1}(F\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ の像に属する．したがって，写像 φ は $i^*\varphi^*(e_{n-1})=a-a'$ となるように選んでよく，

$$(\tilde{f}'|_F)^*(e_{n-1})=a'+(a-a')=a$$

となる．したがって，転入性は証明された．

Cartan 公式の証明

任意の CW 複体 X，任意の自然数 i と $H^*(X\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ の任意の元 x と y に対して，関係式

$$Sq^i(x\cdot y)=\sum_{p+q=i} Sq^p(x)\cdot Sq^q(y) \tag{\#}$$

が成り立つことを証明しなければならない．

X と Y は任意の CW 複体とし，$x\in H^*(X\,;\,\boldsymbol{Z}_2), y\in H^*(Y\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ とする．$\boldsymbol{Z}_2$ は体であるから，このとき，

$$x\otimes y\in H^*(X\times Y\,;\,\boldsymbol{Z}_2)\cong H^*(X\,;\,\boldsymbol{Z}_2)\otimes H^*(Y\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$$

コホモロジー積の定義により，(#) の代わりに次の公式を証明すれば十分である：

$$Sq^i(x\otimes y)=\sum_{p+q=i} Sq^p(x)\otimes Sq^q(y)$$

明らかに，同次な元を考えれば十分である．そこで $x\in H^n(X\,;\,\boldsymbol{Z}_2), y\in H^m(Y\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ とする．このとき写像 $f: X\to K(\boldsymbol{Z}_2, n)$ と $g: Y\to K(\boldsymbol{Z}_2, m)$ が存在して $f^*(e_n)=x, g^*(e_m)=y$ となるから，次の関係式を確かめればよい：

$$Sq^i(e_n\otimes e_m)=\sum_{p+q=i} Sq^p(e_n)\otimes Sq^q(e_m)$$

最初に，$i>m+n$ と仮定する．このとき両辺とも零である．次に，$i=m+n$ とする．このとき

$$Sq^{m+n}(e_m\otimes e_n)=(e_m\otimes e_n)^2=e_m^2\otimes e_n^2=Sq^m(e_m)\otimes Sq^n(e_n)$$

である．右辺の和の全体 $\sum_{p+q=m+n}$ においては $Sq^m(e_m)\otimes Sq^n(e_n)$ に等しい 1 項だけが残るから両辺は等しい．検討するのが残っているのは $i<m+n$ の場合である．（s を固定して）公式は $i=m+n-(s-1)$ について成り立つと仮定し，$i=m+n-s$ についてこれを証明しよう．m と n は任意の数であることを強調しておく．なお，帰納法は差 $m+n-i$ に関するものである．さて Sq^{m+n-s}

$(e_m \otimes e_n)$ を考えよう．以前と同様，$K(\boldsymbol{Z}_2, n)$ の代わりに K_n と書こう．複体 K_m と K_n のスマッシュ積 $K_m \wedge K_n$ をとる．空間の組 X, Y について，スマッシュ積は $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$ として定義されることを思いおこそう．例えば，$S^p \wedge X = \Sigma^p X$ であり，特に $S^1 \wedge X = \Sigma X$ である．スマッシュ積の結合性により，$(S^1 \wedge X) \wedge Y = S^1 \wedge (X \wedge Y)$ すなわち $(\Sigma X) \wedge Y = \Sigma(X \wedge Y)$ である．さらに，$H^*(X \wedge Y) = H^*(X \times Y)/J$，ただし，$J$ は元 $x \otimes 1 + 1 \otimes y$, $x \in H^*(X)$, $y \in H^*(Y)$，により生成される部分群である．

§27 において構成した写像 $f_{m-1} : \Sigma K_{m-1} \to K_m$ を用いた写像の次の組

$$K_m \wedge K_n \xleftarrow{f_{m-1} \otimes 1_{K_n}} (\Sigma K_{m-1}) \wedge K_n = \Sigma(K_{m-1} \wedge K_n)$$
$$K_m \wedge K_n \xleftarrow{1_{K_m} \otimes f_{n-1}} K_m \wedge (\Sigma K_{n-1}) = \Sigma(K_m \wedge K_{n-1})$$

は準同型の次の組を与える：

$$H^r(K_m \wedge K_n; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{(f_{m-1} \otimes 1_{K_n})^*} H^r(\Sigma(K_{m-1} \wedge K_n); \mathbf{Z}_2)$$
$$H^r(K_m \wedge K_n; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{(1_{K_m} \otimes f_{n-1})^*} H^r(\Sigma(K_m \wedge K_{n-1}); \mathbf{Z}_2)$$

または

$$H^r(K_m \wedge K_n; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\Sigma^{-1}(f_{m-1} \otimes 1_{K_n})^*} H^{r-1}(K_{m-1} \wedge K_n; \mathbf{Z}_2)$$
$$H^r(K_m \wedge K_n; \mathbf{Z}_2) \xrightarrow{\Sigma^{-1}(1_{K_m} \otimes f_{n-1})^*} H^{r-1}(K_m \wedge K_{n-1}; \mathbf{Z}_2)$$

ここで Σ は懸垂同型である．準同型 $\Sigma^{-1}(f_{m-1} \wedge 1_{K_n})^*$ と $\Sigma^{-1}(1_{K_m} \wedge f_{n-1})^*$ は $e_m \otimes e_n$ をそれぞれ $e_{m-1} \otimes e_n$ と $e_m \otimes e_{n-1}$ に写す．§27 で示されたように f^*_{m-1} : $H^q(K_m) \to H^q(\Sigma K_{m-1}) = H^{q-1}(K_{m-1})$ は K_m の Serre ファイバー空間のスペクトル系列における転入の逆であり，$0 < q < 2m$ について同型である．

$H^r(K_m \wedge K_n; \boldsymbol{Z}_2)$ における次の共通集合

$$[\mathrm{Ker}\, \Sigma^{-1}(f_{m-1} \wedge 1_{K_n})^*] \cap [\mathrm{Ker}\, \Sigma^{-1}(1_{K_m} \wedge f_{n-1})^*]$$

を考える．この集合において $\rho=\sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$ とおく．このとき，$\sum_i (f_{m-1}^* \alpha_i) \otimes \beta_i=0$ かつ $\sum_i \alpha_i \otimes (f_{n-1}^* \beta_i)=0$，したがって，各 i について $f_{m-1}^* \alpha_i=0$ かつ $f_{n-1}^* \beta_i=0$ である．ρ は $K_m \wedge K_n$ のコホモロジーの元であるから，元 α_i と β_i は 1 と異なる．したがって，$\deg \alpha_i \geq 2m$, $\deg \beta_i \geq 2n$．よって $\deg \rho \geq 2(m+n)$ であると仮定してよい．これらの核の共通集合は次数が $2(m+n)$ より小さい元を含まないことを証明したことになる．

さて，Cartan 公式に戻ろう．$H^{2(m+n)-s}(K_m \wedge K_n\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ において

$$\rho=Sq^{m+n-s}(e_m \otimes e_n)-\sum_{p+q=m+n-s} Sq^p(e_m) \otimes Sq^q(e_n)$$

は零と異なると仮定する．このとき帰納法により

$$\begin{aligned}
&\Sigma^{-1}(f_{m-1} \wedge 1_{K_n})^* \rho \\
&=Sq^{m+n-s}(\Sigma^{-1} f_{m-1}^* e_m \otimes e_n)-\sum_{p+q=m+n-s} Sq^p(\Sigma^{-1} f_{m-1}^* e_m) \otimes Sq^q e_n \\
&=Sq^{m+n-s}(e_{m-1} \otimes e_n)-\sum_{p+q=m+n-s} Sq^p e_{m-1} \otimes Sq^q e_n=0
\end{aligned}$$

同様に，$\Sigma^{-1}(1_{K_m} \wedge f_{n-1})^* \rho=0$ である．

ここで $\deg \rho=2(m+n)-s<2(m+n)$ であるから，$\rho=0$ を得，これで Cartan 公式の証明が終わる．

§29. Steenrod 代数

$\boldsymbol{Z}_2$ 上の Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ とは，作用素の合成により定義された積をもつ体 $\boldsymbol{Z}_2$ 上のすべての安定コホモロジー作用素から成る多元環である．容易にわかるように，$\mathscr{A}$ の乗法生成元の系として，作用素

$$1, Sq^1, Sq^2, Sq^3, \cdots, Sq^n, \cdots$$

を選んでよい．すなわち，任意の安定作用素は Steenrod 平方の合成の線型結合である．

すべての Steenrod 平方の集合は $\mathscr{A}$ の自由な生成元系にはならない．$\mathscr{A}$ の加法的基底として，系列 $I=(i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}, i_k)$ が条件 $i_1 \geq 2i_2, i_2 \geq 2i_3, \cdots, i_{k-1} \geq 2i_k$ を満たす Steenrod 平方のすべての反復

$$Sq^I=Sq^{i_1} Sq^{i_2} \cdots Sq^{i_{k-1}} Sq^{i_k}$$

の集合を選ぶことができる．このような系列 I は**認容的**といわれる．反復作用素 Sq^I は I が認容的のとき**認容的**であるとよばれる．

$\mathscr{A}$ の乗法構造は次の **Adem の関係式**により定義される：

$$Sq^aSq^b=\sum_c\binom{b-c-1}{a-2c}Sq^{a+b-c}Sq^c$$

右辺は，認容的反復作用素の線型結合であることに注意する．実際，任意の2つの Steenrod 平方の反復は，2項の認容的反復作用素の合成である．このとき，任意の反復 Sq^I は認容的なものの線型結合で書けることがわかる．実際，和 $\sum_{j=1}^{k} i_j$ が1つの固定した正整数に等しいすべての系列 $I=(i_1,\cdots,i_k)$ を考える．このとき，辞書式順序（$\Leftrightarrow i'_1=i_1,\cdots,i'_{s-1}=i_{s-1}$ かつある s について $i'_s>i_s$ のときは $(i'_1,i'_2,\cdots,i'_k)\succ(i_1,i_2,\cdots i_k)$）をもつ有限集合を得る．今，$Sq^I=Sq^{i_1}Sq^{i_2}\cdots Sq^{i_k}$ を考える．これは認容的であるか，ある s について $i_s<2i_{s+1}$ であるかのいずれかである．$Sq^{i_s}Sq^{i_{s+1}}$ に Adem の関係式を使って，$Sq^{I'_r}$ の線型結合でこれを置き換える．ただし，各 r について $I'_r\succ I$ である．次に，同様にして，隣り合わせの Steenrod 平方の他の組を置き換える．再び Adem の関係式により，各項で添字が辞書式順序に増えることが保証される．このように，この操作は有限であり，認容的反復作用素の合成で終わる．

Adem の関係式の特別な場合として，次が成り立つ：

$$Sq^1Sq^k=\begin{cases}Sq^{k+1} & k\text{ が偶数のとき}\\ 0 & k\text{ が奇数のとき}\end{cases}$$

例えば，$Sq^1=\beta$ であり，$\beta\beta=0$ であるから，すでにわかっているように $Sq^1Sq^1=0$ である．$a=b=2$ については $Sq^2Sq^2=Sq^3Sq^1$ を得る．ついでに，Steenrod 代数は可換でないこともわかる：$Sq^1Sq^2\neq Sq^2Sq^1$.

この節の残りでは，これらすべての命題の証明を行なおう．主な道具は Borel の定理である．

Borel の定理

次の条件を満たすあるファイバー空間 $E\xrightarrow{F}B$ の mod 2 コホモロジー・スペクトル系列が与えられていると仮定する：

(1) $E_\infty=0$.

(2) ファイバー F のコホモロジー $H^*(F;\boldsymbol{Z}_2)$ は転入的生成元系 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$ をもつ歪対称な多元環である．

(3) この系は**単純**である．すなわち，単項式 $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}$, $i_1<i_2<\cdots<i_k$, は多元環の加法基底をなす．（このとき，したがって，$a_i^2=0$ かまたは元 a_i^2 は各 a_j

を高々1つ含む項をもつ単項式の和に分解する．例えば，もし

$$H^*(F\,;\,\boldsymbol{Z}_2)=\Lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)$$

ならば，明らかに $a_1, a_2, \cdots, a_k$ は単純生成元系であり，もし

$$H^*(F\,;\,\boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[a_1, a_2, \cdots, a_k]$$

ならば，$a_1, \cdots, a_k\,;\,a_1^2, \cdots, a_k^2\,;\,a_1^4, \cdots, a_k^4\,;\,a_1^8, \cdots, a_k^8\,;\,\cdots$ は単純生成元系である.)

定理 (Borel) 条件 (1)～(3) が満たされるならば，底空間 B のコホモロジー $H^*(B\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ は生成元 $b_i=\tau(a_i)$ をもつ多項式環である．

証明 生成元 a_i の次数は添字について非増加であると仮定する．条件を満たすある抽象的なスペクトル系列 $(\tilde{E}_r^{p,q}\,;\,\tilde{d}_r)$ を構成し，次にこれが与えられたファイバー空間のスペクトル系列と一致することを証明する．

$\tilde{A}$ はスペクトル系列のファイバーにおける多元環を表わすとし，テンソル積 $\tilde{A}\otimes\boldsymbol{Z}_2[b_1, b_2, b_3, \cdots]$ を考える．ただし，生成元 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ は $a_1, a_2, a_3, \cdots$ と一対一対応にあり，$\deg b_n=\deg a_n+1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とする．$\tilde{E}_2=\tilde{A}\otimes\boldsymbol{Z}_2[b_1, b_2, b_3, \cdots]$（自然な双次数をもつ）とおく．次に，微分 $\tilde{d}_r$ を定義する．これは当然底辺の行の元の上では零に等しいとする．ファイバー（すなわち左の列の元）では，$r<\deg a_i$ について（すべての生成元は新しいスペクトル系列では転入的であることを意味して）$\tilde{d}_r(a_i)=0$ とおき，$r=\deg a_i$ のときは（簡単のために，テンソル積の記号を適宜省略して）$\tilde{d}_r(a_i)=b_i$ とおく．さて，元 $\alpha\in\tilde{E}_2$ が与えられたとする．これは元 $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}\otimes b_{j_1}^{s_1}b_{j_2}^{s_2}\cdots b_{j_p}^{s_p}$，ただし $i_1<i_2<\cdots<i_k\,;\,j_1<\cdots<j_p\,;\,s_m>0$，の線型結合として書くことができる．そこで

$$\tilde{d}_r(a_{i_1}\cdots a_{i_k}\otimes b_{j_1}^{s_1}\cdots b_{j_p}^{s_p})=\begin{cases}0 & r<\deg a_{i_1}\ \text{のとき}\ (i_1\leq j_1)\\ a_{i_2}\cdots a_{i_k}\otimes b_{i_1}b_{j_1}^{s_1}\cdots b_{j_p}^{s_p} & r=\deg a_{i_1}\ \text{のとき}\ (i_1\leq j_1)\\ 0 & \text{すべての}\ r\quad (i_1>j_1)\end{cases}$$

と定義する．このとき明らかに，(加法的な)スペクトル系列を得る．言いかえれば，$\tilde{d}_2\tilde{d}_2=0$ であり，$\tilde{E}_3=\mathrm{Ker}\,\tilde{d}_2/\mathrm{Im}\,\tilde{d}_2$ とおくと，微分 $\tilde{d}_3$ は通常通り定義される．さらに，このとき $\tilde{d}_3\tilde{d}_3=0$ であり，$\tilde{E}_4=\mathrm{Ker}\,\tilde{d}_3/\mathrm{Im}\,\tilde{d}_3$ とおく．以下，同様に定義する．このとき（すべての微分で輪体な各生成元は，ある微分の像に属するので）$\tilde{E}_\infty=0$ である．積の存在を確かめることが残っているが，詳細は読者に任せて，重要な等式

$$\tilde{d}_r(AA')=\tilde{d}_r(A)A+A\tilde{d}_r(A')$$

のみを考える．ただし，$A=a_{i_1}\cdots a_{i_k}\otimes b_{j_1}^{s_1}\cdots b_{j_p}^{s_p}$, $A'=a_{m_1}\cdots a_{m_l}\otimes b_{n_q}^{t_1}\cdots b_{n_q}^{t_q}$, $i_1=m_1=r$, $i_1<j_1$, $i_1<n_1$ である．このとき，

$$\tilde{d}_r(A)\cdot A'=(a_{i_2}\cdots a_{i_k}\otimes b_{i_1}b_{j_1}^{s_1}\cdots b_{j_p}^{s_p})(a_{m_1}a_{m_2}\cdots a_{m_l}\otimes b_{n_1}^{t_1}\cdots b_{n_q}^{t_q})$$

$$=a_{i_1}(a_{i_2}\cdots a_{i_k})(a_{m_2}\cdots a_{m_l})\otimes b_{i_1}(b_{j_1}^{s_1}\cdots b_{j_p}^{s_p})(b_{n_1}^{t_1}\cdots b_{n_q}^{t_q})$$

および類似な等式

$$A\cdot\tilde{d}_r(A')=a_{i_1}(a_{i_2}\cdots a_{i_k})(a_{m_2}\cdots a_{m_l})\otimes b_{i_1}(b_{j_1}^{s_1}\cdots b_{j_p}^{s_p})(b_{n_1}^{t_1}\cdots b_{n_q}^{t_q})$$

が成り立つ．すなわち，$\tilde{d}_r(A)A'+A\tilde{d}_r(A')=0$ を得る．したがって，$\tilde{d}_r(AA')=0$ を証明しなければならない．しかし，ここで $AA'=a_{i_1}^2\cdots\otimes\cdots$ である．まず $a_{i_1}^2$ は生成元の和 $a_{l_1}+\cdots+a_{l_m}$ であることを示す．そうではない，すなわち，$a_{i_1}^2$ は $a_{l_1}\cdots a_{l_m}$, $l_1<i_1$, という形の積の和であると仮定する．これは，一方では $d_{l_1}a_{i_1}^2=2d_{l_1}a_{i_1}=0$ であり，他方では $d_{l_1}(a_{l_1}\cdots a_{l_m})=a_{l_2}\cdots a_{l_m}\otimes b_{l_1}$（考えている微分はファイバー空間のスペクトル系列のもの）であるから，定理の条件に矛盾する．したがって，AA' は添字が i_1 より大きい因子で始まるから，$\tilde{d}_{i_1}(AA')=0$ である．これでほとんど準備はできた．すなわち，2つのスペクトル系列があり，いずれも乗法的かつ $E_\infty=0$ であり，E_2 項において左端の列は同一である．E_2 項の底辺の行は，最初のファイバー空間のスペクトル系列の場合は $H^*(B\,;\boldsymbol{Z}_2)$ であり，2番目の場合には，仮定により何か $H^*(B\,;\boldsymbol{Z}_2)$ に等しいものである．さて，$H^*(B\,;\boldsymbol{Z}_2)$ は次数 q まで多元環 $\boldsymbol{Z}_2[b_1,b_2,\cdots]$，ただし $b_i=\tau(a_i)\in H^*(B\,;\boldsymbol{Z}_2)$，に同型であり，次数 q において，$H^*(B\,;\boldsymbol{Z}_2)$ に新しい生成元 c あるいは $\boldsymbol{Z}_2[b_1,b_2,\cdots]$ にはない1つの関係式がおこると仮定する．このとき，双方の E_2 項は第 q 列まで同じ列をもち，微分も同一である．第 q 列の差は $E_\infty\neq 0$ という結果になる．すなわち，この新しい生成元 c が E_∞ に生き残るか，または，この関係式のために，構成されたスペクトル系列において $H^*(B\,;\boldsymbol{Z}_2)$ で零である元に写される元が E_∞ に生き残るか，のいずれかである．いずれの場合も矛盾である．　（証明終）

さて，Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ に戻ろう．

定理（Serre）　$H^*(K(\boldsymbol{Z}_2,n)\,;\boldsymbol{Z}_2)$ は生成元 Sq^Ie_n の多項式環である．ただし，$e_n\in H^n(K(\boldsymbol{Z}_2,n)\,;\boldsymbol{Z}_2)$ は基本類，$I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ は認容的，すなわち，$i_1\geq 2i_2, i_2\geq 2i_3,\cdots,i_{k-1}\geq 2i_k$ かつ $\operatorname{exc} I<n$ である．ここで $\operatorname{exc} I$ は $\operatorname{exc} I=(i_1-2i_2)+(i_2-2i_3)+\cdots+(i_{k-1}-2i_k)+i_k=2i_1-(i_1+i_2+\cdots+i_k)$ で定義される系列

I のエクセス (excess) を意味する.

注意 1 $I \neq (0)$ について $\mathrm{exc}\, I \geq 1$.

注意 2 条件 $\mathrm{exc}\, I < n$ を調べよう. 元 e_n 上の反復作用素 $Sq^I(e_n) = Sq^{i_1}Sq^{i_2} \cdots Sq^{i_k}(e_n)$ を考える. (作用素として)すべての Sq^{i_s} はそれより前の元 $Sq^{i_{s+1}} \cdots Sq^{i_k}(e_n)$ の上では恒等的には零でないと仮定する. このとき, 不等式 $i_k \leq n$, $i_{k-1} \leq n + i_k$, $i_{k-2} \leq n + i_k + i_{k-1}$, $\cdots$, $i_1 \leq n + i_k + i_{k-1} + \cdots + i_2$ が成り立つ. 特に最後の不等式は $2i_1 \leq n + |I|$, すなわち, $\mathrm{exc}\, I \leq n$ を意味する.

証明 (帰納法による.) $n=1$ については, Serre の定理は明らかである. 実際, $K(\boldsymbol{Z}_2, 1) = \boldsymbol{RP}^\infty$ であり, 一方, すでに示されたように $H^*(\boldsymbol{RP}^\infty; \boldsymbol{Z}_2) \cong \boldsymbol{Z}_2[e_1]$, $\deg e_1 = 1$ である. (0) 以外は, excess<1 の認容的系列は存在しない.

各 $k \leq n-1$ について定理は証明されたと仮定する. ファイバー空間 $* \xrightarrow{K_{n-1}} K_n$ の mod 2 コホモロジー・スペクトル系列を考える. $|I|$ は和 $i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_k$ を表わすとする. 反復作用素 Sq^I は次数を $|I|$ だけ上げ, 定義により $\mathrm{exc}\, I = 2i_1 - (I)$ である. 帰納法の仮定により $H^*(K_{n-1}; \boldsymbol{Z}_2)$ は乗法生成元 $\rho_I = Sq^I(e_{n-1})$ の多項式である. ただし, $\mathrm{exc}\, I < n-1$ であり, 反復作用素 Sq^I は認容的である. さて, $E_\infty = 0$ であるから, e_{n-1} は転入的であり, したがって, すべての $\rho_I = Sq^I e_{n-1}$ もまた転入的である. 乗法生成元系 $\{\rho_I\}$ は単純ではない. しかし, 多元環 $\boldsymbol{Z}_2[\rho_I \mid I$ は認容的, $\mathrm{exc}\, I < n-1] \cong H^*(K_{n-1}; \boldsymbol{Z}_2)$ にはすべての元 $\rho_I^{2^i}, i \geq 0$ から成る単純生成元系がある. 明らかに,

$$(\rho_I)^2 = (Sq^I e_{n-1})^2 = Sq^{|I|+n-1} Sq^I (e_{n-1})$$
$$(\rho_I)^{2^2} = Sq^{2(|I|+n-1)} Sq^{|I|+n-1} Sq^I (e_{n-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

が成り立ち, したがって$(\rho_I)^{2^i}$ という形の各巾はこのような表現をもつ. したがって, これらすべては転入的元である. さて, $(\rho_I)^{2^i} = Sq^J e_{n-1}$ で定義される J について, $\mathrm{exc}\, J = n-1$ であるから, 元 $(\rho_I)^{2^i}$ は上の乗法生成元系 $\{\rho_I\}$ に属さない. 逆に, $\deg I = n-1$ を満たす任意の元 $Sq^I(e_{n-1})$ は $\mathrm{exc}\, I' < n-1$ をもつ $(\rho_{I'})^{2^i}$ という形である. 実際, $I = (i_1, i_2, \cdots, i_k)$ かつ $Sq^I e_{n-1} = Sq^{i_1} \cdots Sq^{i_k} e_{n-1}$ とする. このとき, $\mathrm{exc}\, I = i_1 - (i_2 + i_3 + \cdots + i_k) = n-1$ である. したがって, $i_1 = (i_2 + i_3 + \cdots + i_k) + n - 1 = \deg\, (Sq^{i_2} \cdots Sq^{i_k} e_{n-1})$ であり, $Sq^I e_{n-1} = (Sq^{i_2} \cdots Sq^{i_k} e_{n-1})^2$ である. さらに, $I' = (i_2, i_3, \cdots, i_k)$ は $\mathrm{exc}\, I' < n-1$ を満たし, かつ

$Sq^I e_{n-1}=(\rho_{I'})^2$ であるか，または $\mathrm{exc}\, I'=n-1, i_2=\deg(Sq^{i_3}\cdots Sq^{i_k}e_{n-1})$ かつ $Sq^I e_{n-1}=(Sq^{i_3}\cdots Sq^{i_k}e_{n-1})^4$ であるか，のいずれかである．このように議論を進めて，命題を得る．後は作用素 Sq^I の転入性を利用してスペクトル系列に Borel の定理を適用するだけである．　　　　（証明終）

上で示されたように，Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ は $H^*(K(\boldsymbol{Z}_2, n); \boldsymbol{Z}_2)$ の極限として得ることができる．したがって，次の結果が得られる．

定理　作用素 Sq^I，ただし（excess には何の制限もなしに）I は認容的，は多元環 $\mathscr{A}$ の加法基底になる．

ここで作用素 Sq^I は次数 $<\mathrm{exc}\, I$ のすべての元の上で自明である．実は，この命題は $\deg x<n$ について $Sq^n(x)=0$ という等式の一般化である．

$\mathscr{A}$ における積は，作用素の合成として定義されたので，$H^*(K(\boldsymbol{Z}_2, n); \boldsymbol{Z}_2)$ の乗法構造と何の関係もないことに注意してほしい．

上の定理は，mod 2 コホモロジーで定義され，値をとるすべての安定コホモロジー作用素は反復 Steenrod 平方の線型結合であることを意味している．さらに，各作用素は認容的反復作用素の線型結合として表わされるが，これら認容的反復作用素はすべての反復作用素の集合の小部分にしかならないので，反復作用素の間には多くの関係式があることをも示している．以下でこれらの関係式を考察しよう．

無限次元実射影空間 $\boldsymbol{RP}^\infty$ の N 個の積 $X=\prod_{i=1}^{N}\boldsymbol{RP}^\infty$ を考える．明らかに $H^*(X; \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_1, \cdots, x_N]$ は N 個の 1 次元生成元の多項式環である．$\boldsymbol{u}$ は積 $x_1x_2\cdots x_N\in H^N(X; \boldsymbol{Z}_2)$ を表わすとする．

$\mathscr{A}$ には自然な次数付け $\mathscr{A}=A_0\oplus A_1\oplus\cdots$ がある．ただし，$A_q=\mathscr{O}^S(q, \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2)$ は次数を q 上げる作用素の群である．q を固定し，$N\gg q$ をとる．$\varphi\in A_q$ とし，$j(\varphi)=\varphi(x_1x_2\cdots x_N)=\varphi(\boldsymbol{u})$ とおいて写像 $j: A_q\to H^*(X; \boldsymbol{Z}_2)$ を考える．ここに，次の驚くべき事実がある．

命題　写像 j は単射準同型である．言いかえれば，$H^*(X; \boldsymbol{Z}_2)$ において $\varphi(\boldsymbol{u})=0$ ならば必然的に $\varphi\equiv0$，すなわち，任意の複体 Y と（任意の次数 $\boldsymbol{p}$ の）元 $\alpha\in H^p(Y; \boldsymbol{Z}_2)$ に対して等式 $\varphi(\alpha)=0$ が成り立つ．

証明　部分群 $B_q=j(A_q)\subset H^*(X; \boldsymbol{Z}_2)$ を考え，B_q の元を解説しよう．ここでもコホモロジー作用素の自然性は最も興味ある結果を数多く意味する非常に

強い性質であることがわかる．ψ は任意の(必ずしも安定でない)コホモロジー作用素とする．このとき，$\psi(x_1x_2\cdots x_N)$ は $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の対称多項式である．これを証明するには，i 次と j 次の因子を交換する写像 $f_{ij}: X\to X$ を考えれば十分である．

自然性のさらにもう1つの結果は，$\psi(u)$ は u で割り切れる．すなわち，$\psi(u)=uP(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，ただし $\deg P=q$，ということである．これを証明するために，埋込み $\underbrace{\boldsymbol{RP}^\infty\times\cdots\times\boldsymbol{RP}^\infty}_{N-1}\to X$ を考える．ただし，左辺の積で第 i 番目の因子は省略されている．u が零に写されるから，コホモロジーにおいて誘導される写像は，$\psi(u)$ を零に写す．したがって，$\psi(u)$ は x_i で割り切れ，これはすべての i について正しい．

任意の安定作用素は作用素 Sq^I の線型結合であるから，これらの性質をもっと詳しく研究するには Steenrod 平方の反復を考察する必要がある．多項式 $j(\varphi)\in \boldsymbol{Z}_2[x_1, x_2, \cdots, x_N]$ において各 x_i は，2の巾の次数をもつことを示す．そのため $\boldsymbol{RP}^\infty$ を考える．Cartan 公式により直ちに次式

$$Sq^i(x^{2^k})=\begin{cases}x^{2^k} & i=0 \text{ のとき}\\ x^{2^{k+1}} & i=2^k \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他の } i \text{ について}\end{cases}\qquad \left(\text{特に } Sq^i(x^j)=\binom{j}{i}x^{i+j}\right)$$

を得るから，多項式 $Sq^I(u)$ において，各変数の次数は2の巾である．したがって，$j(\varphi)=uP(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，$\deg P=q$ であり，P は対称的，かつ各 x_i の次数は 2^k-1 である．逆に，この形の各多項式は写像 j によりある φ の像である．実際，多項式 $\mathrm{Symm}(x_1^{2^k}\cdots x_{n_1+1}^{2^{k-1}}\cdots x_{n_2}^{2^{k-1}}\cdots x_{n_{k-1}+1}^2\cdots x_{n_k}^2 x_{n_k+1}\cdots x_N)$ を考える．ただし Symm は各項が与えられた単項式の形をした対称式を表わし，$1\leq n_1\leq n_2\leq\cdots\leq n_k\leq N$ は $n_1(2^k-1)+(n_2-n_1)(2^{k-1}-1)+\cdots+(n_k-n_{k-1})=q$ を満たす任意の数である．このような多項式はすべての多項式の集合において加法的基底をなす．考えている多項式は，辞書式に順序付けられた基底で分解されるとき，次式

$$Sq^{2^{k-1}n_1}\cdots Sq^{2n_{k-1}}Sq^{n_k}(u)$$

において最高の項である．よって，主張は直ちにわかる．

したがって，B_q を完全に記述したことになる．しかし，($\boldsymbol{Z}_2$ 上のベクトル空間として) B_q と A_q の次元の計算が残っている．B_q の次元を求めるには，与

えられた自然数の 2^k-1 という形の整数の和としての表わし方を数えれば十分である．A_q の次元は $|I|=q$ を満たす認容的系列 I の個数に等しい．I は任意の認容的系列 $I=(i_1, i_2, \cdots, i_k)$, $i_1 \geq 2i_2, i_2 \geq 2i_3, \cdots, i_{k-1} \geq 2i_k$，とし，$i_1+i_2+\cdots+i_k=q$ とする．系列 $\alpha_1=i_1-2i_2, \alpha_2=i_2-2i_3, \cdots, \alpha_{k-1}=i_{k-1}-2i_k$，$\alpha_k=i_k$ を考える．明らかに，$q=\sum_{p=1}^{k}\alpha_p(2^p-1)$ であり，q の任意のこのような分割は認容的系列を定義する．

再び，$|I|=q$ を満たす認容的系列 I の個数は分割 $q=\sum_i(2^{k_i}-1)$ の個数に等しい．したがって，$\dim B_q=\dim A_q$，すなわち，上述したように $A_q \cong B_q$，すなわち，j は単射準同型である．　　（証明終）

例　関係式 $Sq^1Sq^1=0$ の新しい証明を与えよう．実際，次式において各項は係数 2 をもつから，

$$\begin{aligned} Sq^1Sq^1(x_1x_2\cdots x_N) &= Sq^1(x_1^2x_2\cdots x_N+x_1x_2^2x_3\cdots x_N+\cdots+x_1x_2\cdots x_N^2) \\ &= \cdots+x_1\cdots x_i^2\cdots x_j^2\cdots x_N+\cdots+x_1\cdots x_i^2\cdots x_j^2\cdots x_N+\cdots \\ &= 0 \end{aligned}$$

演習　$Sq^2Sq^2=Sq^3Sq^1$ を証明せよ．

Adem の関係式

前に述べたように，Adem の関係式

$$Sq^aSq^b=\sum_{c=0}^{[\frac{a}{2}]}\binom{b-c-1}{a-2c}Sq^{a+b-c}Sq^c \quad (a<2b)$$

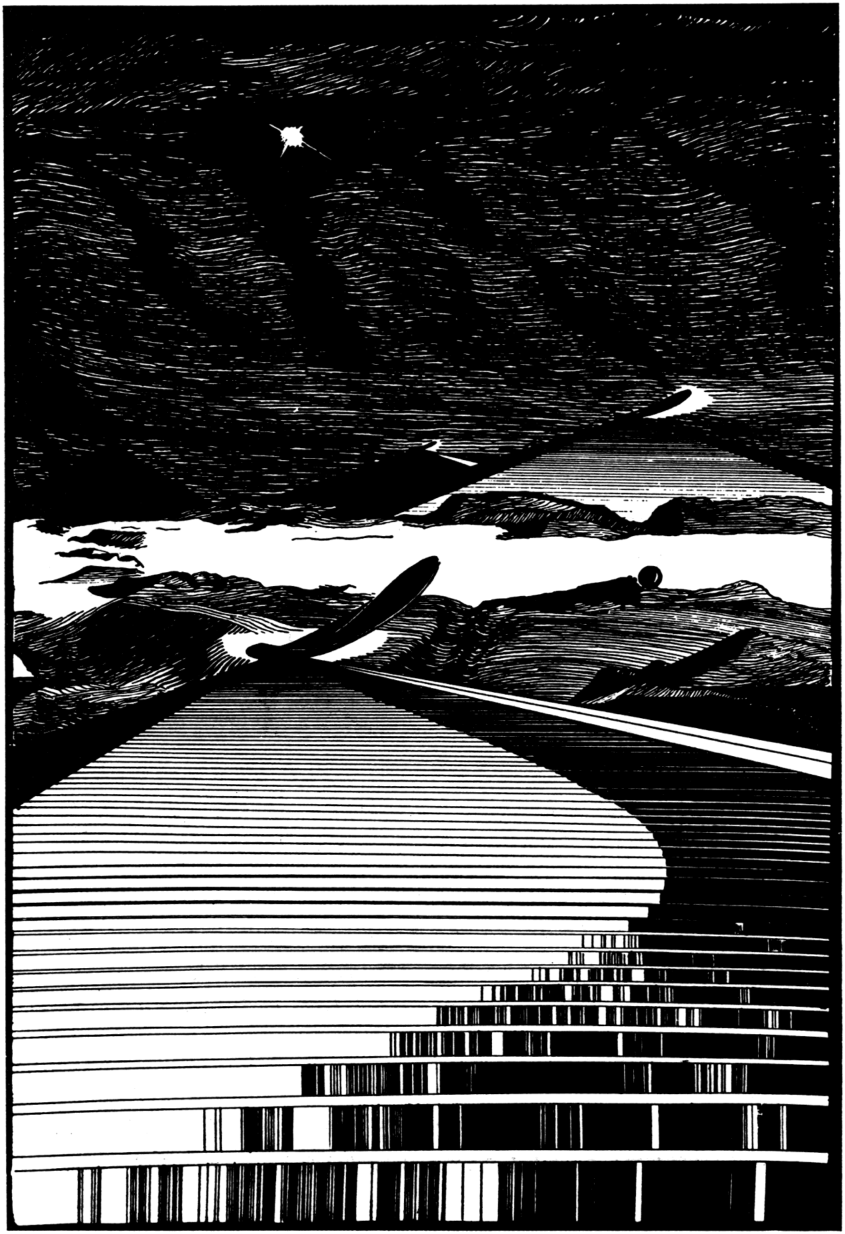
は，多元環 $\mathscr{A}$ における関係式の完全な系をなす．これらを証明するには，次式を確かめればよい．

$$Sq^aSq^b(u)=\sum_c\binom{b-c-1}{a-2c}Sq^{a+b-c}Sq^c(u)$$

ただし，$u=x_1x_2\cdots x_N \in H^N(X\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$．Cartan 公式を適用して，この等式の両辺を次の形にする：

$$(\text{左辺})=\sum_s\binom{b+a-3s}{b-s}\mathrm{Symm}(x_1^4\cdots x_s^4x_{s+1}^2\cdots x_{a+b-s}^2x_{a+b-s+1}\cdots x_N)$$

$$(\text{右辺})=\sum_c\sum_s\binom{b+a-3s}{c-s}\binom{b-c-1}{a-2c}\mathrm{Symm}(x_1^4\cdots x_s^4x_{s+1}^2\cdots x_{a+b-s}^2x_{a+b-s+1}\cdots x_N)$$



したがって，次の合同式を確かめる必要がある：

$$\binom{b+a-3s}{b-s} \equiv \sum_{c} \binom{b+a-3s}{c-s}\binom{b-c-1}{a-2c} \pmod 2$$

あるいは，$d=a-2s, e=b-s, f=c-s$ を代入して

$$\binom{d+e}{e} \equiv \sum_{f=\max(0,d-e+1)}^{[\frac{d}{2}]} \binom{d+e}{f}\binom{e-f-1}{d-2f} \pmod 2$$

となるが，これは初等的な方法で証明できる．

Adem の関係式系の完全性は，Adem の関係式を用いて，Steenrod 平方の任意の反復は認容的なものの線型結合に帰着できるという前出の注意からわかる．認容的反復作用素は線型独立であることが証明できるから，反復作用素の間の任意の関係式は Adem の関係式の結果である．(関係式 $F=0$ をとり，Adem の関係式を用いて，これを $F_0=0$，ただし，F_0 は認容的反復作用素の線型結合，という形にする．このとき，$F_0\equiv 0$，すなわち，F は Adem の関係式により零に帰着される．すなわち，関係式 $F=0$ は Adem 関係式から出る．)

系　$\{1, Sq^1, Sq^2, Sq^4, Sq^8, \cdots\}$ は，多元環 $\mathscr{A}$ の乗法生成元の最小系である．

証明は読者に任せる．

$\oplus_q \mathscr{O}^S(q, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_2)$ の計算

空間 $K(\boldsymbol{Z}, n)$ の mod 2 コホモロジー群は $K(\boldsymbol{Z}_2, n)$ と同様 Serre により決定された．結局，この事実は，(n に関する帰納法，Borel の定理の応用という) 完全に類似な計算を要するだけなので驚くべきことではない．

定理　$n\geq 2$ について $H^*(K(\boldsymbol{Z}, n); \boldsymbol{Z}_2)$ は生成元 $Sq^I \bar{\iota}_n$ の多項式環である．ただし，$\bar{\iota}_n \in H^n(K(\boldsymbol{Z}, n); \boldsymbol{Z}_2)$ はコホモロジー群の生成元であり，$I=(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ は $\mathrm{exc}\, I<n$ かつ $i_k>1$ を満たす任意の認容的系列である．

(最後の不等式 $i_k>1$ は，$K(\boldsymbol{Z}, n)$ の場合と $K(\boldsymbol{Z}_2, n)$ の場合の唯 1 つの違いである．)

これを極限に移して次を得る．

定理　$\boldsymbol{Z}_2$ 上のベクトル空間とみなしたとき，群 $\oplus_q \mathscr{O}^S(q, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_2)$ は $I=(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ が認容的かつ $i_k>1$ を満たすすべての作用素 Sq^I から成る基底をもつ．

証明は読者に任せる.

注意 1　われわれは Sq^i を $\mathcal{O}^S(i, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_2)$ の元として, すなわち, 作用素 $H^q(X;\boldsymbol{Z})\to H^{q+i}(X;\boldsymbol{Z}_2)$ として考えている. 実は, Sq^i は整係数の元に直接適用してはいけない. まず最初にこの元を mod 2 に簡約する, すなわち, Sq^i と Sq^I は, $Sq^i\circ\rho$ と $Sq^I\circ\rho$ を表わすものと理解する. ただし, ρ は整係数コホモロジーを mod 2 に簡約する準同型である.

注意 2　Sq^1 は $H^*(K(\boldsymbol{Z}, n);\boldsymbol{Z}_2)$ に自明に作用すると思ってはいけない. 等式 $Sq^1\bar{e}_n=0$ があるだけで, 例えば $n\geq 3$ について $Sq^1Sq^2\bar{e}_n=Sq^3\bar{e}_n\neq 0$ である.

mod *p* Steenrod 代数

$p=2$ の場合と同様な理論は任意の素数 $p>2$ についての作用素の群 $\mathcal{O}^S(q, \boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Z}_p)$ についても展開できる.

1つの例を思いおこそう. 係数の完全系列 $0\to\boldsymbol{Z}_p\to\boldsymbol{Z}_{p^2}\to\boldsymbol{Z}_p\to 0$ に関する Bockstein 準同型 $\tilde{\beta}_p$ を考える. 明らかに $\Sigma\circ\tilde{\beta}_p=-\tilde{\beta}_p\circ\Sigma$ (この符号は $p=2$ の場合は無視できる) であるから,

$$\beta_p(x)=(-1)^{\dim x}\tilde{\beta}_p(x)$$

で与えられるコホモロジー作用素 β_p は安定である. このコホモロジー作用素は $p>2$ のとき, Sq^1 の役割を果たす.

Steenrod 平方に類似な他の作用素も存在する. すなわち, $\mathcal{O}^S(2i(p-1), \boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Z}_p)$ において**Steenrod 巾(作用素)**とよばれる一意的な安定コホモロジー作用素 $\mathscr{P}_p^i$ が存在し, $x\in H^{2i}(X;\boldsymbol{Z}_p)$ に対して, $\mathscr{P}_p^i(x)=x^p$ を満たす. $p=2$ の場合と同様に, 作用素 $\mathscr{P}_p^0$ は恒等写像, $\deg x<2i$ である x に対して $\mathscr{P}_p^i(x)=0$ である. ($p=2$ については $\mathscr{P}_2^i=Sq^{2i}$ であることも同意しておく.)

次数を q 上げるすべての安定コホモロジー作用素の群 $\mathcal{O}^S(q, \boldsymbol{Z}_p, \boldsymbol{Z}_p)$ を $A_{q(p)}$ で表わす. 直和 $\mathscr{A}_{(p)}=A_{0(p)}\oplus A_{1(p)}\oplus A_{2(p)}\oplus\cdots$ は $\boldsymbol{Z}_p$ 上のベクトル空間と考えられる. さらに, 作用素の合成による積はこれに次数付きの多元環の構造を与える. これは **mod *p* Steenrod 代数**とよばれる. すなわち, これまでは, mod 2 Steenrod 代数 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_{(2)}$ を考察していたことになる. 次数を保つ任意の作用素はスカラー積であるから, 明らかに $A_{0(p)}=\boldsymbol{Z}_p$ である.

$\mathscr{A}_{(p)}$ の基底の問題は $p=2$ の場合と同様におこる. $k\equiv 0, 1 \pmod{2p-2}$ の場合に, 次の作用素 St^k を定義しよう:

$$St^k=\begin{cases}\mathscr{P}_p^i & k=2i(p-1)\quad のとき\\ \beta_p\circ\mathscr{P}_p^i & k=2i(p-1)+1\ のとき\end{cases}$$

これまでは，Sq^i の反復を用いてきたが，これからは，St^k の反復を扱わねばならない．($p=2$ については $St^k=Sq^k$ である．)

$i_m\equiv 0,1 \pmod{2p-2}$ を満たす系列 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ が与えられたとする．これにコホモロジー作用素 $St^I=St^{i_1}St^{i_2}\cdots St^{i_k}$ を対応させる．系列 I は $i_1\geq pi_2$, $i_2\geq pi_3$, $i_3\geq pi_4,\cdots$ のとき**認容的**であるという．

定理　認容的反復作用素 $\{St^I\}$ は $\boldsymbol{Z}_p$-加群 $\mathscr{A}_{(p)}$ の加法的基底をなす．

コホモロジー作用素 St^I の間の関係式は次の **Adem の関係式**により生成される：

$$\mathscr{P}_p^a\mathscr{P}_p^b=\sum_{c=0}^{\left[\frac{a}{p}\right]}(-1)^{c+a}\binom{(p-1)(b-c)-1}{a-pc}\mathscr{P}_p^{a+b-c}\mathscr{P}_p^c$$

$$\mathscr{P}_p^a\beta_p\mathscr{P}_p^b=\sum_{c=0}^{\left[\frac{a}{p}\right]}(-1)^{c+a}\binom{(p-1)(b-c)}{a-pc}\beta_p\mathscr{P}_p^{a+b-c}\mathscr{P}_p^c$$
$$+\sum_{c=0}^{\left[\frac{a-1}{p}\right]}(-1)^{c+a-1}\binom{(p-1)(b-c)-1}{a-pc-1}\mathscr{P}_p^{a+b-c}\beta_p\mathscr{P}_p^c,\quad a<pb$$

系　($p=2$ の場合と同様に) $\mathscr{A}_{(p)}$ の乗法生成元の系として，$\{1,\beta_p,\mathscr{P}_p^1,\mathscr{P}_p^p,\mathscr{P}_p^{p^2},\mathscr{P}_p^{p^3},\cdots\}$ をとれる．

この定理の最初の証明は H. Cartan により与えられた．これについて詳細を知りたいならば M.M. Postnikov の論文 (Russian Math. Surveys, 1966, Vol. 21, No. 4) を推薦する．

§25 において，多元環 $\mathscr{A}_{(p)}$ についてはいくつかの部分的情報をすでに与えていることを思いおこそう．

いくつかの記号と定義を導入しよう．k が体のとき，$\Lambda(m,k)$ により k-基底 $(1,x)$ をもつ k-多元環を表わす．ただし，$\deg x=m$ であり $x^2=0$ である．これは生成元 x の**外積代数**とよばれ，$\Lambda(x)$ とも表わされる．次に $P(m,k)$ により基底 $(1,x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(k)},\cdots)$ をもつ k-多元環を表わす．ただし，$\deg x^{(k)}=km$ であり，積公式は $x^{(k)}\cdot x^{(r)}=\binom{k+r}{k}x^{(k+r)}$ である．これは生成元 $x^{(1)}=x$ の **divided 多項式環**とよばれ，$\Gamma(x)$ とも表わされる．明らかに，$x=x^{(1)}$ は多元環 $P(m,k)$ の生成元である．テンソル積という用語は，上の多元環の枠内で用

いられるときは他のテンソル積は考えないから,「左」という言葉を省略して,いつも左テンソル積 ($\Longleftrightarrow (a\otimes b)\cdot(c\otimes d)=(-1)^{\deg b\cdot\deg c}ac\otimes bd$) を意味することにする.

定義　p は素数とする. 次が成り立つとき, 系列 $I=(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ は群 $\pi=\boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{Z}_{p^s}$ に関して条件 (C_p) を満たすといわれる.

(1) $i_1\geq pi_2,\ i_2\geq pi_3, \cdots,\ i_{k-2}\geq pi_{k-1},\ i_{k-1}\geq 2p-2$,

(2) $\pi=\boldsymbol{Z}$ について, $i_k=0$,

(3) $\pi=\boldsymbol{Z}_{p^s}$ について, $i_k=0$ または 1,

(4) $1\leq t\leq k$ について, $i_k\equiv 0$ または 1 (mod $2p-2$).

以下, 標準的な記号 $H^*(\pi, n\,;\,\boldsymbol{Z}_p)=H^*(K(\pi, n)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ を用いる.

定理 (H. Cartan)　任意の $n\geq 1$ と任意の素数 $p\geq 2$ についてコホモロジー環 $H^*(\pi, n\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$, ただし $\pi=\boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{Z}_{p^s}$, は(奇数次数の生成元をもつ)外積代数 $\Lambda(m, \boldsymbol{Z}_p)$ と(偶数次数の生成元をもつ)普通の多項式環とのテンソル積に同型である. $n\geq 2, p=2$ かつ $\pi=\boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{Z}_{2^s}$ については多元環 $H^*(\pi, n\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ は普通の多項式環のテンソル積に同型である. それぞれの場合, 次数 $n+q$ の生成元の個数は, (C_p) を満たし $|I|=q$ かつ $pi_1<(p-1)(n+q)$ が成り立つ系列 I の個数に等しい.

注意　前出の結果はすべてこの定理の特別な場合とみなしてよい. $\pi=\boldsymbol{Z}$ ならば, (C_p) は $i_k=0$ かつ $i_{k-1}\geq 2p-2$ を意味する. $p=2$ については, 最後の不等式は $i_{k-1}\geq 2$, すなわち, Sq^1 は反復作用素 Sq^I に含まれないことを意味する. さらに, $pi_1<(p-1)(n+q)$ はよく知られた条件 exc $I<n$ に同値である.

$K(\pi, n)$ のホモロジー環も完全に記述できることがわかる. ただし, 積は $K(\pi, n)=\Omega K(\pi, n+1)$ の H-空間構造により誘導される.

定理 (H. Cartan)　$n\geq 1$ かつ $p>2$ が素数ならば, ホモロジー環 $H_*(\pi, n\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$, ただし $\pi=\boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{Z}_{p^s}$, は(奇数次数の生成元をもつ)外積代数 $\Lambda(m, \boldsymbol{Z}_p)$ と(偶数次数の生成元をもつ) divided 多項式環とのテンソル積に同型である. $n\geq 2$ かつ $p=2$ ならば, ホモロジー環 $H_*(\pi, n\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$, ただし $\pi=\boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{Z}_{2^s}$, は divided 多項式環のテンソル積に同型である. 安定次数 q の生成元の個数は, 条件 (C_p) を満たし $|I|=q$ である系列 I の個数に等しい.

基底の選び方については

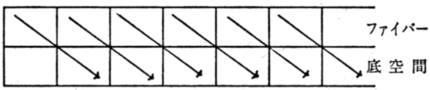
定理 (H. Cartan)　$\pi=\boldsymbol{Z}$ とし，$\tilde{e}_n\in H^n(\boldsymbol{Z},n\,;\boldsymbol{Z}_p)$ は基本類とする．このとき，$H^*(\boldsymbol{Z},n\,;\boldsymbol{Z}_p)$ を構成する外積代数と普通の多項式環の生成元として元 $St_p^I(\tilde{e}_n)$ を選ぶことができる．ただし，I は (C_p) を満たし $pi_1<(p-1)(n+|I|)$ である．

この証明と $K(\pi,n)$ の整係数コホモロジーに関するさらに詳しい結果は

H. Cartan : Algèbres d'Eilenberg–MacLane et homotopie, Sém. H. Cartan, ENS, 7e année, 1954/1955 を参照されたい．

第1の応用

球面のホモトピー群，もっと正確にはその2成分にもう一度戻ろう．最初のキリング空間 $S^n|_n\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z}_2,n-1)}S^n$ を考える．低次元を調べるので，このファイバー空間の mod 2 コホモロジー・スペクトル系列の「角」の影響はわれわれには関係しないから，単にこれらを忘れることにする．今の場合，1つの行と列以外は零のみを含むスペクトル系列の普通の図式はあまり効果的とは思えないので，計算にもっと便利ではあるが新しいアイディアは何も含まない単純化されたものを使う．



全次数：　$n-1$　n　$n+1$　$n+2$　$n+3$　...

$a\in H^n(S^n\,;\boldsymbol{Z}_2)$ は生成元とする．明らかに，転入 $\tau: e_{n-1}\longmapsto a$ である．$\pi=\boldsymbol{Z}$ であるので，$Sq^1(e_{n-1})=0$ であり図式は次の形をとる：

ファイバー	e_{n-1} ↘	0	Sq^2e_{n-1}	Sq^3e_{n-1}	Sq^4e_{n-1}	Sq^5e_{n-1}	$Sq^4Sq^2e_{n-1}$ Sq^6e_{n-1}
底空間		a	0	0	0	0	0
	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$

上の行のすべての元は，変えられたり，途中で消去されたりせずに，E_∞ に生き残る．したがって，$H^*(S^n|_n\,;\boldsymbol{Z}_2)$ の低い安定次数における作用素の作用を調べるのが残ったことになる．

Sq^2e_{n-1} の E_∞ における像を h_1 で表わす．このとき，$Sq^3e_{n-1}=Sq^1Sq^2e_{n-1}$

$=Sq^1h_1$ である．さて，系 $\{Sq^{2^i}\}$ は最小の基底であり，Sq^4e_{n-1} はこのような表現をもたないから，次数 $n+3$ の新しい乗法生成元 h_2 として，E_∞ における Sq^4e_{n-1} の像をとらなければならない．したがって，$Sq^5e_{n-1}=Sq^1h_2=Sq^2Sq^1h_1$ ただし $Sq^2h_1=Sq^3h_1=0$ である．計算はここで終わる．最初の4つの安定次数については，次を得る．

h_1	Sq^1h_1	h_2	$Sq^1h_2=$ $=Sq^2Sq^1h_1$	$\cdots$
$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	

したがって，$H^*(S^n|_n;\boldsymbol{Z}_2)$ の一部分を計算したことになる．$\pi_{n+1}(S^n)$ を決定しよう．われわれは $\pi_{n+1}(S^n)\cong\pi_{n+1}(S^n|_n)$ に同型な群 $H_{n+1}(S^n|_n)$ に関心がある．§23において，$\pi_{n+1}(S^n)$ と $\pi_{n+2}(S^n)$ は有限で，2成分以外は p 成分をもっていないことを示した．一般に

$$H_q(X)\cong\mathrm{Hom}(H^q(X),\boldsymbol{Z})\oplus\mathrm{Ext}(H^{q+1}(X),\boldsymbol{Z})$$

であるから，$H_{n+1}(S^n|_n)$ は，$H^{n+1}(S^n|_n)$ の自由部分と $H^{n+2}(S^n|_n)$ の torsion 部分群との直和であることがわかる．したがって，最初の直和因子は零で，$\pi_{n+1}(S^n)\cong H_{n+1}(S^n|_n)\cong\mathrm{Tors}\,H^{n+2}(S^n|_n)$ である．さて，$\mathrm{Tors}\,H^{n+2}(S^n|_n)\cong H^{n+2}(S^n|_n)\cong\boldsymbol{Z}_2$ である．実際，$Sq^1h_1=\rho_2(\alpha)$，ただし $\alpha\in H^{n+2}(S^n|_n)$，であり，$\alpha$ は位数2である．(これは，$Sq^1=\beta$ と β の定義からわかるように，任意の空間 X の $Sq^1\xi\in H^*(X;\boldsymbol{Z}_2)$ という形の任意の元について正しい．$\beta\xi$ を構成する最後の段階は，構成により位数2である元 $\frac{1}{2}\delta\xi$ を mod 2 に簡約することである．) よって，$H^{n+2}(S^n|_n)$ は位数2の元を含み，これは2で割れない (さもなければ，$\rho_2(\alpha)=0$) こともわかる．次に普遍係数公式

$$H^{n+2}(S^n|_n;\boldsymbol{Z}_2)\cong H^{n+2}(S^n|_n)\otimes\boldsymbol{Z}_2\oplus\mathrm{Tor}\,(H^{n+3}(S^n|_n),\boldsymbol{Z}_2)$$

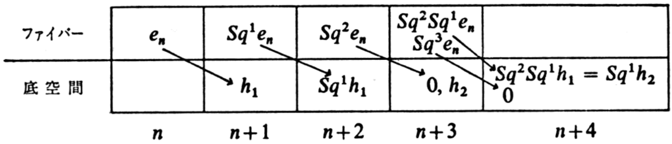
の左辺において $H^{n+2}(S^n|_n;\boldsymbol{Z}_2)\cong\boldsymbol{Z}_2$ であるから，$H^{n+2}(S^n|_n)\cong\boldsymbol{Z}_2$ である．したがって，任意の $n\geq3$ について $\pi_{n+1}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_2$ であることを示したことになる．($n=2$ については，すでにわかっているように $\pi_3(S^2)\cong\boldsymbol{Z}$ である．)

定理

$$\pi_{n+1}(S^n)\cong\begin{cases}\boldsymbol{Z} & n=2\\ \boldsymbol{Z}_2 & n>2\end{cases}$$

さて，次のキリング空間を用いて，$\pi_{n+2}(S^n)$ を計算しよう：

$$S^n|_{n+1}\xrightarrow{K(\boldsymbol{Z}_2,n)}S^n|_n$$



標準的に考えて E_∞ を得る：

$n+1$	$n+2$	$n+3$	
0	ρ_1	$\rho_2,\ Sq^1\rho_1$	$\cdots$

すぐわかるように，次数 $n+3$ において，2つの生成元 ρ_2 と $Sq^1\rho_1$ が現われる．再び上述したものと同様な計算を行なう．ただし，記号は $\pi_{n+1}(S^n)$ の場合と同じであり，簡単のために $S^n|_{n+1}=Y$ とおく．ここでも，$\mathrm{Tors}\,H_{n+2}(Y)\cong\pi_{n+2}(Y)\cong\pi_{n+2}(S^n)$ を求めなければならない．再び，$H^{n+2}(Y)=0$ かつ $H^{n+2}(Y\,;\boldsymbol{Z}_2)\cong\boldsymbol{Z}_2$ である．さて，$H^{n+3}(Y\,;\boldsymbol{Z}_2)\cong\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2$ であり，生成元は ρ_2 と $Sq^1\rho_1$ である．ここで前出の議論を逐語的に繰り返して $\mathrm{Tors}\,H^{n+3}(Y)\cong\boldsymbol{Z}_2$ を得る．したがって，$n\geq3$ について $\pi_{n+2}(S^n)\cong\mathrm{Tors}\,H_{n+2}(Y)\cong\mathrm{Tors}\,H^{n+3}(Y)\cong\boldsymbol{Z}_2$ である．

定理　$\pi_{n+2}(S^n)\cong\boldsymbol{Z}_2\quad n\geq3$

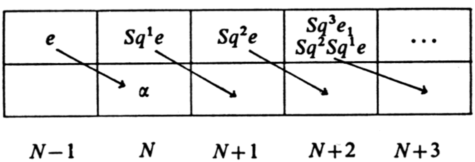
$\pi_{n+3}(S^n)$ を求めるために，さらに，この議論を進めてもよいが，これは自明というわけではまったくない．

第V章　Adams スペクトル系列

§30. 一般的なアイディア

前節の末尾で示したように，これまで集めた情報は安定ホモトピー群を求めるのに十分である．空間 X の mod p コホモロジーが一度わかると，第1，第2，第3などのキリング空間のコホモロジー群の「安定部分」は容易に求められる．それぞれの場合について，Hurewicz の定理により対応するホモロジー群がわかる．しかし，この操作(Serre の方法)では，少なくとももう1つの難点を克服しない限りはホモトピー群を計算できない．

例えば，ある空間 X の任意の係数をもつコホモロジーが，すべてのコホモロジー作用素の作用と共にわかっているとき，X の安定ホモトピー群を求めたいとしよう．最初の自明でないホモトピー群は，例えば次元 N において $\boldsymbol{Z}_2$ であると仮定する．ファイバー空間 $X|_N \xrightarrow{K(\boldsymbol{Z}_2, N-1)} X$ の mod 2 コホモロジー・スペクトル系列を考える．



この図で $e\in H^{N-1}(K(\boldsymbol{Z}_2, N-1)\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ は基本類であり，α は $H^N(X\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ の生成元である．上の行には安定次数で Steenrod 代数 $\mathscr{A}_{(2)}$ と一致する $K(\boldsymbol{Z}_2,$

$N-1)$ の mod 2 コホモロジーがある．微分は e を α に写し，さらに各コホモロジー作用素 φ について元 $\varphi(e)$ を $\varphi(\alpha)$ に写す．下の行において生き残る元は，いかなるコホモロジー作用素の下でも α の像に属さない $H^*(X\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ の元である．また，上の行において生き残る元は，$\varphi(\alpha)=0$ であるときの $\varphi(e)$ という形の元である．これは，$X|_N$ のすべてのコホモロジー群がわかることを意味する．しかし，コホモロジー作用素の作用についての知識は完全ではない．例えば，Steenrod 代数において関係式 $Sq^{20}Sq^{30}=0$（多分このような関係式はないのであろうが，これが問題点なのではない）があり，$Sq^{30}\alpha=0$ であると仮定する．このとき，上の行において $Sq^{30}e$ は生き残る．$X|_N$ のコホモロジーにおいて，この元は，作用素 Sq^{30} によるいかなる元の像にもなりえない．コホモロジー作用素 Sq^{20} をこれに適用すると，$Sq^{20}Sq^{30}=0$ であるので，結果は上の行のいかなる元でもない．しかし，これは下の行の自明でない元になりうる．すなわち，元 $Sq^{20}(f)=y$ が $H^*(X|_N\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ に存在する．ここで f は $Sq^{30}e\in H^*(K(\boldsymbol{Z}_2, N-1)\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ から来ており，y は $H^*(X\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ のある元から来ている．

E_∞								$f=$	$Sq^{30}e$		
										$y=$	$Sq^{20}f$

同様な結果は $\sum_i Sq^{b_i}Sq^{c_i}=0$ という形のもっと複雑な関係式からも出てくる．

以上で，コホモロジー作用素の作用に関する情報は完全ではないことがわかり，したがって，次のキリング空間のコホモロジーは未確定なまま残る．

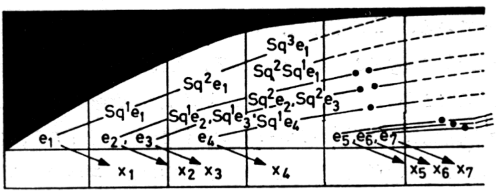
実際，現在の位相幾何学はこの難点を克服する方法をもっていない．これまでのところ，球面のホモトピー群でさえすべて計算されているわけではない．しかし，単に難しさを明らかにするだけかもしれないが，方法は1つある．すなわち，ホモトピー群の決定に関連するすべての計算を，初項はアルゴリズム的には計算でき，微分の計算が基本的な難しい点をすべて含んでいるような1つのスペクトル系列に集める方法である．これが **Adams スペクトル系列**である．その有用性にはもちろん単に難しさを示す以上のものがある．実際，これにより難しい点を幾分かは克服することもできる．すなわち，このスペクトル系列は，通常のキリング空間の表現に留まっていればわからないような一連の

さらに有用な構造(例えば，乗法構造)を備えており，微分の作用について十分な情報をわれわれに与えてくれる．

この結果を定式化し，証明を与える前に，いくつかの基本的なアイディアを解説する．Serre の方法は，最初に n 次，次に $(n+1)$ 次などとその次の次数のコホモロジー群を「消去(キリング)」することを意味する．Adams の方法も群を消去するのであるが，同じ順序ではない．空間 X が与えられたとし，これが $(N-1)$ 連結であると仮定する．目的は，次元 N から $N+n$ までのホモトピー群の p 成分の決定である $(n\ll N)$．最初の段階でこれらの次数の mod p コホモロジーをすべて消去する．例えば，次のようにする：$H^{N+q}(X;\boldsymbol{Z}_p)$ の各加法生成元は写像 $X\to K(\boldsymbol{Z}_p, N+q)$ を与える．これらを合わせて，X からいくつかの $K(\boldsymbol{Z}_p, N+q)$ 空間の積空間 $\Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i)$ への写像を構成する．これにより誘導されたファイバー空間

$$X(1)\xrightarrow{\Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p,\, N+q_i-1)} X$$

のスペクトル系列を考えよう．上の行には，いわゆる自由な $\mathscr{A}_{(p)}$-加群がある．(すなわち，この行にはコホモロジー作用素は自由に作用する．すなわち，多元環 $\mathscr{A}_{(p)}$ の関係式により意味されるもの以外の関係式はない．)



微分は上の行から底辺の行への全射を定義し，上の行で生き残っているものは，この写像の核であり，底辺の行には零だけが残る．E_∞ はこの 1 つの行だけだから，コホモロジー作用素の作用も込めて空間 $X(1)$ のコホモロジーに関するすべての情報を得る．そこで今度は $X(1)$ に対して同じ構成を繰り返してよい．この操作を繰り返した結果が Adams のキリング空間の系列 $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$, … である．

同じ目的，すなわち，X のすべてのコホモロジー群の消去(キリング)は，もっと有効な方法で達成できるであろう．実際，$H^*(X;\boldsymbol{Z}_p)$ の各加法生成元を独立に消

去する必要はない．例えば，$\mathscr{P}_p^i\xi \neq 0$ とする．元 ξ を消去するならば，$\mathscr{P}_p^i\xi$ も自動的に消去されるから，これは改めて消去する必要はない．言いかえれば，すべての加法生成元というよりも，$\mathscr{A}_{(p)}$–加群 $H^*(X;\boldsymbol{Z}_p)$ の生成元を考えさえすればよい．すなわち，まず $H^N(X;\boldsymbol{Z}_p)$ のすべての加法生成元を考える．次に，$H^{N+1}(X;\boldsymbol{Z}_p)$ においては，前出の生成元系からコホモロジー作用素により得られる元は無視して，純粋に新しい生成元のみを考える．さらに，$H^{N+2}(X;\boldsymbol{Z}_p),\cdots$ などにこの操作を続ける．

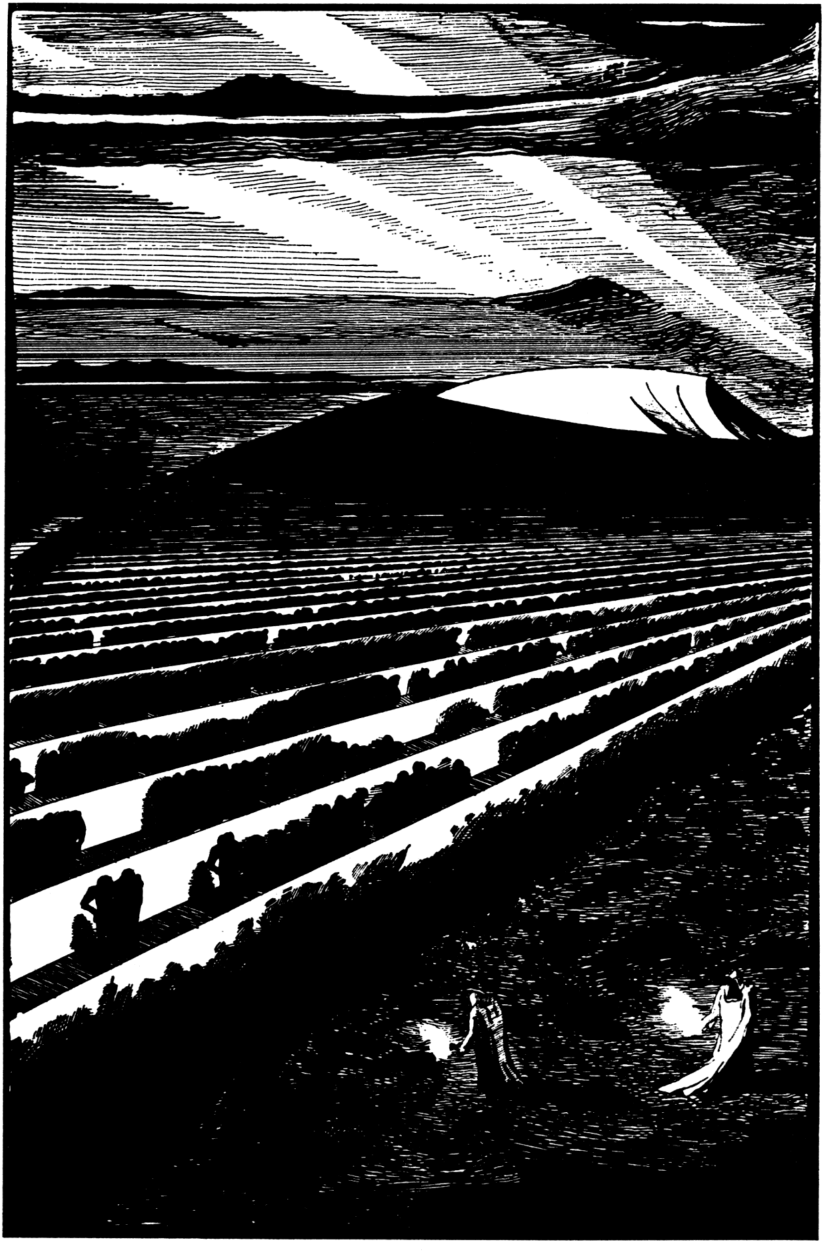
代数学の言葉でいえば，次のことを行なっている．$\mathscr{A}_{(p)}$–加群 $H^*(X;\boldsymbol{Z}_p)$ が与えられているとき，その上に自由 $\mathscr{A}_{(p)}$–加群 F_1（ファイバー空間 $X(1)\to X$ のスペクトル系列の上の行）を写す．この全射の核（$\cong H^*(X(1);\boldsymbol{Z}_p)$）の上に再び自由 $\mathscr{A}_{(p)}$–加群を写し，以下この操作を繰り返す．この結果得られるのは，$H^*(X;\boldsymbol{Z}_p)$ 以外の項すべては自由である $\mathscr{A}_{(p)}$–加群の完全系列

$$\cdots\to F_2\to F_1\to H^*(X;\boldsymbol{Z}_p)\to 0$$

である．このとき，**自由分解**があるという．これは，後に議論するが，多くの注目すべき性質をもつ系列である．

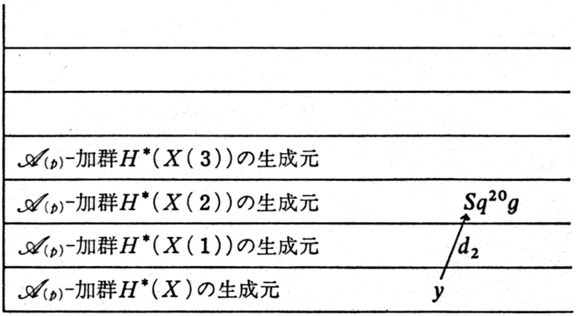
さて，幾何学に戻ろう．Adams のキリング空間の系列 $\{X(k)\}$ は段々小さくなるコホモロジー群をもち，極限では自明になるので，ある意味では，収束する過程をもっている．この意味で，Serre の方法よりも Adams の方法を用いるともっと完全な仕事ができる，すなわち，各キリング空間のすべてのコホモロジー群を消去できるのである．しかしながら，Serre の方法を適用するときは Hurewicz の定理により空間のホモトピー群を直接利用する．すなわち，ホモトピー群のある元に直接関係している次数より低いコホモロジー類はつねに消去する．一般に，これは Adams の方法の場合には行なわない．

上の例に戻ろう：$\pi_N(X)\cong\boldsymbol{Z}_2$，群 $H^N(X;\boldsymbol{Z}_2)$ の生成元 α は $Sq^{30}\alpha=0$ を満たし，$X|_N$ のコホモロジーにおいては，$f=Sq^{30}e$ と $Sq^{20}f=y$ が生き残っている．Serre の方法を採用すれば，改たに y を消去する必要はない．それまでにこの元は $f\in H^*(X|_N;\boldsymbol{Z}_2)$ と共に消えてしまっている．次に Adams の方法に従うと，一番最初の段階で独立に両方の元を消去する．したがって，Adams の方法は Serre の方法よりも多くの消去（キリング）を必要とする．各次数 $N+q$ で，Adams の方法のすべての段階で消去される生成元の個数を計算して，$\pi_{N+q}(X)$ の p 成分の上限を得る．この評価は実は，Adams スペクトル系列の最初の項のもの



である．ここで微分は，余分な元を次のように消去する．

y は不必要に消去された唯1つの元ではないことはわかっている．$X|_N$ と同様，$X(1)$ のコホモロジーも元 f を含む．さて，$X|_N$ においては $Sq^{20}f=y$ であるが，$X(1)$ においては $Sq^{20}f=0$ である．これは $X(2)$ において無用の元が発生することを意味する．実際，f がある g により消去されたとすると，Serre の方法を適用しても現われはしない元 $Sq^{20}g$ が生き残る．これは次の段階で消去しなければならない．この Adams スペクトル系列の初項は次の通りである：



そして，2番目の微分 d_2 は y を $H^*(X(2)\,;\boldsymbol{Z}_2)$ において $Sq^{20}g$ から来る元に写し，したがって，2つの無用の元は消滅する．

極限の項 E_∞ は，X の安定ホモトピー群の p 成分に同伴している．

§31.　代数学からのいくつかの補助的概念

A は体 k 上の単位元をもつ結合的多元環とし，次数付け $A=\bigoplus_q A_q=\cdots\oplus A_{-1}\oplus A_0\oplus A_1\oplus\cdots$ をもつとする．**A 上の左加群**（あるいは **A-加群**）とは各元 $(a,x)\in A\times T$ をある $ax\in T$ に写し，次の公理を満たす写像 $A\times T\to T$ を備えた k 上の次数付きベクトル空間 T，すなわち，直和 $T=\bigoplus_{k=-\infty}^{+\infty}T_k$ である：

(1)　$a\in A_k,\ x\in T_l$　ならば　$ax\in T_{k+l}$,

(2)　$a(x_1+x_2)=ax_1+ax_2$,

(3)　$(a_1+a_2)x=a_1x+a_2x$,

(4)　$b(ax)=(ba)x,\ (ax)b=(ba)x,\ a\in A,\ b\in k$

右 A-加群の概念も同様に定義される．左 A-加群 T が**自由**であるとは，部分集合 $T'\subset T$ で，各元 $x\in T$ が一意的な方法で(有限)和 $x=\sum_i a_ie_i,\ a_i\in A,$

$e_i \in T'$ と書けるものを含むときをいう． このような部分集合 T' は自由 A-加群 T の**基底**とよばれる． 例えば，多元環 A そのものも，A が多元環として関係式をもっているときでも， 単位元から成る基底をもつ自由な A-加群と考えてよい．

A-加群 T^1 から A-加群 T^2 への**準同型**とは，準同型 $f : T^1 \to T^2$ で $f(T^1_k) \subset T^2_k$ かつ各 $a \in A$ と $x \in T^1$ について $f(ax) = af(x)$ を満たすものである．

明らかに，任意の A-加群 T に対して，F_T が自由 A-加群である完全系列

$$0 \longrightarrow I_T \longrightarrow F_T \overset{\pi}{\longrightarrow} T \longrightarrow 0$$

が存在する．実際，F_T として，基底が対 $(a, x), a \in A, x \in T$, の集合である k 上のベクトル空間を選んでよい． 多元環 A は式 $a'(a, x) = (a'a, x)$ により F_T 上に作用し，F_T の次数付けは自然に定義される．また全射準同型 π は $\pi(a, x) = ax$ により与えられる．$I_T = \mathrm{Ker}\,\pi$ である．

A-加群 P が**射影的**であるとは，完全系列をもつ任意の図式

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & P & & \end{array}$$

が次の可換な図式に拡張されるときである．言いかえれば，P が射影的である

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & \nwarrow & \uparrow & & \\ & & P & & \end{array}$$

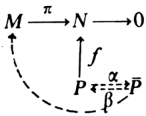
とは，P から任意の商加群 M/R への任意の A-加群準同型が合成 $P \to M \to M/R$ であるときをいう．

命題　A-加群 P が射影的であるための必要十分条件は，P が自由 A-加群の直和因子となることである．

証明　まず，任意の自由 A-加群 P は射影的であることを証明する． 実際，$P' = \{p_i\}$ が P の基底であり，完全系列をもつ図式

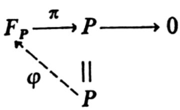
$$\begin{array}{ccccc} M & \overset{\pi}{\longrightarrow} & N & \longrightarrow & 0 \\ & \underset{\varphi}{\nwarrow} & \uparrow f & & \\ & & P & & \end{array}$$

が与えられているならば，$n_i=f(p_i)$ を考え，$\pi(m_i)=n_i$ を満たすように $m_i \in M$ を選び，$\varphi: P \to M \Leftrightarrow \varphi(p_i)=m_i$ と定義する．次に，P は自由 A-加群 $\bar{P}$ の直和因子，すなわち，$\alpha: P \to \bar{P}$ と $\beta: \bar{P} \to P$ が存在して，$\beta \circ \alpha: P \to P$ は恒等写像であると仮定する．このとき，P は射影 A-加群である．実際，



が完全系列をもつ図式ならば，$f \circ \beta$ は自由 A-加群 $\bar{P}$ から N への写像であり，したがって，$\varphi: \bar{P} \to M$ が存在して $\pi \circ \varphi = f \circ \beta$ を満たす．準同型 $\psi = \varphi \circ \alpha$: $P \to M$ は $\pi \circ \psi = \pi \circ \varphi \circ \alpha = f \circ \beta \circ \alpha = f$ を満たす．

逆に，任意の射影 A-加群はある自由 A-加群の直和因子である．実際，P は射影的であると仮定する．このとき，自由 A-加群 F_P をもつ完全系列 $F_P \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$ が存在する．次の図式



を考える．P は射影的であるから，この図式は $\varphi: P \to F_P$ により拡張されて，$\pi \circ \varphi: P \to P$ は恒等写像となる．したがって，

$$F_P = P \oplus \mathrm{Ker}\,\pi$$

となり，P は自由 A-加群 F_P の直和因子である．　（証明終）

演習　A は複体 X 上の連続な（例えば，実）関数の多元環，T は X 上のベクトル束 ξ のすべての（連続な）切断の空間とする．T は（T における A の自然な作用に関して）射影 A-加群であることを証明せよ．さらに，T が自由 A-加群であるための必要十分条件は，ベクトル束 ξ が自明であることを証明せよ．ξ は自明なベクトル束の直和因子であるから，すべての場合に，T は自由 A-加群の直和因子となることに注意する．

この演習は射影加群と自由加群の間の差を説明している．これはベクトル束と自明なベクトル束との差と同じであると言ってよい．

上の命題においてわれわれが用いる唯1つの意味合いは，任意の自由加群は

射影的であるということである．

T は任意の右 A-加群とする．このとき，各 A_k $(k=0,1,2,\cdots)$ が右射影加群である次の完全系列

$$\cdots\to A_k\to A_{k-1}\to\cdots\to A_1\to A_0\to T\to 0$$

が存在する．これは加群 T の **射影分解** といわれる．（すべての A_k が自由ならば，**自由分解**といわれる．）

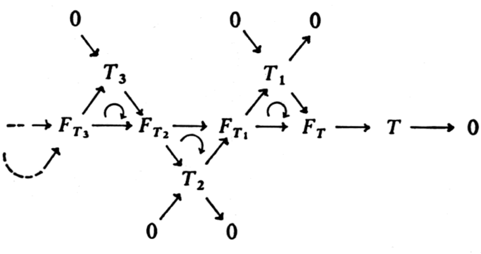
自由分解は次のようにして構成される．任意の加群 T に対して，F_T が自由であるような完全系列

$$0\to I_T\to F_T\to T\to 0$$

がある．$T_1=I_T,\ T_2=I_{T_1},\ T_3=I_{T_2},\cdots$ とおく．このとき，次の完全系列がある：

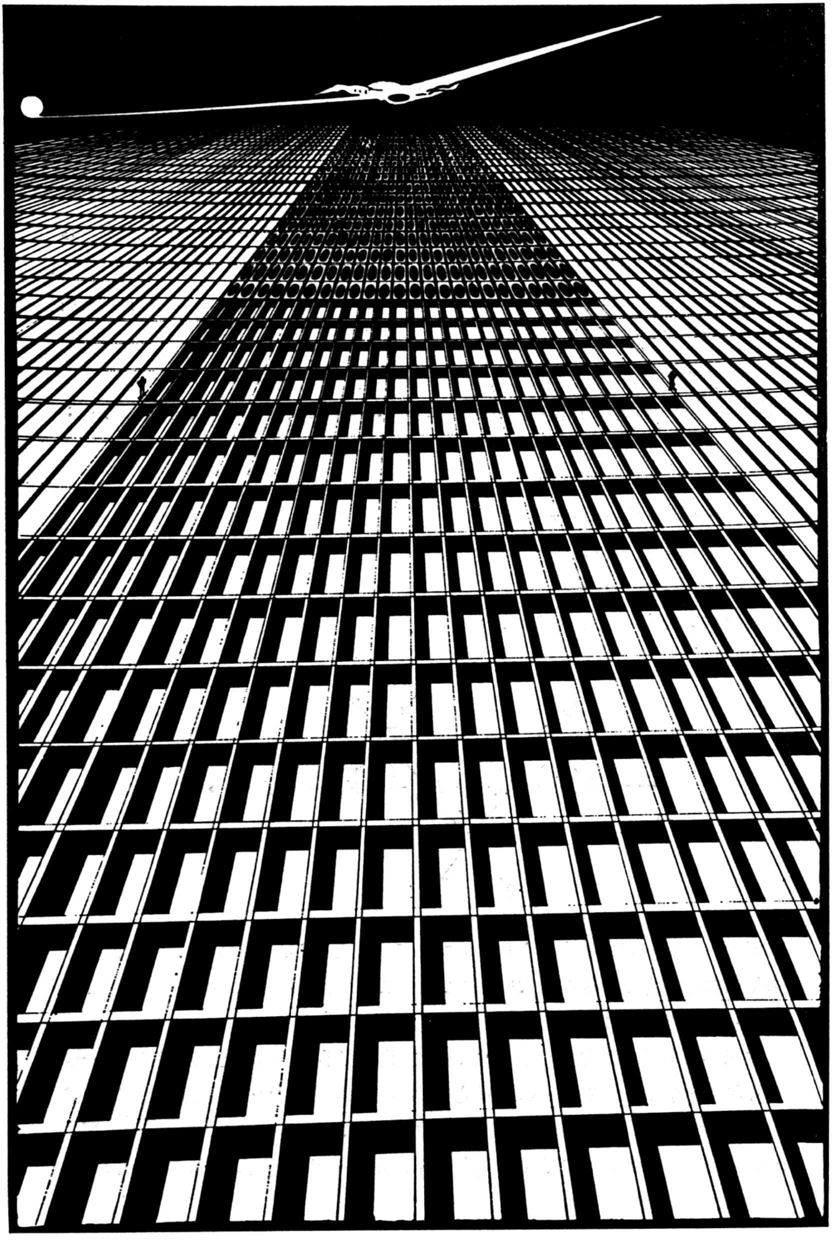
$$0\to T_1\to F_T\to T\to 0$$
$$0\to T_2\to F_{T_1}\to T_1\to 0$$
$$0\to T_3\to F_{T_2}\to T_2\to 0$$
$$0\to T_4\to F_{T_3}\to T_3\to 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

これは次の完全系列を構成する：



T の分解は一意的に定まらないのであるが，しかし，それ以降の構成は分解の特別な選び方には依存しない．（これはここでは証明しないが，読者はこのギャップを埋めることを勧める．）

左 A-加群 N を固定し，テンソル積 の 共変関手 $\cdots\otimes_A N$ と反変関手 $\mathrm{Hom}_A(\cdots, N)$ を考える．右 A-加群 M と左 A-加群 N のテンソル積 $M\otimes_A N$ は必ずしも A-加群ではないが，自然に次数付けされている．すなわち，$m\otimes n$, $m\in M_k$, $n\in N_l$, の次数は $k+l$ である．M と N が左 A-加群ならば $[\mathrm{Hom}_A(M,N)]_s$



は,「次数$-s$」の準同型, すなわち, A の作用と可換であり, 各 k について M_k を N_{k-s} に写す準同型から成る. M から N への A-準同型のなす群は, 上の意味では $[\mathrm{Hom}_A(M,N)]_0$ であることに注意する.

さて, 射影分解に関手 $\cdots\otimes_A N$ を適用しよう. その結果得られる系列

$$\cdots\to A_k\otimes_A N\to\cdots\to A_1\otimes_A N\to A_0\otimes_A N$$

は代数的複体(すなわち, 任意の相次ぐ準同型の合成は自明)である. (この系列には $\to T\otimes_A N\to 0$ がないことに注意する.) この系列の完全性からの偏差はこの場合 $\mathrm{Tor}_n^A(M,N)$ で表わされるホモロジー群で測ることができる. ただし, $\mathrm{Tor}_0^A(T,N)=T\otimes_A N$ である.

演習　これを証明せよ.

$\mathrm{Tor}_n^A(T,N)$ は次のように自然な方法で次数付けられる:

$$\mathrm{Tor}_n^A(T,N)=\oplus_k[\mathrm{Tor}_n^A(T,N)]_k=\oplus_k\,\mathrm{Tor}_{n,k}^A(T,N)$$

Tor のさらに重要な性質を述べる.

命題　任意の射影 A-加群 T に対して, $n>0$ のとき $\mathrm{Tor}_n^A(T,N)=0$ である.

演習　これを証明せよ.

次に関手 $\mathrm{Hom}_A(\cdots,N)$ を考え, これを射影分解に適用して, 再び複体

$$\cdots\leftarrow\mathrm{Hom}_A(A_k,N)\leftarrow\cdots\leftarrow\mathrm{Hom}_A(A_0,N)\leftarrow\mathrm{Hom}_A(A,N)$$

を得る. このホモロジー群は $\mathrm{Ext}_A^n(T,N)$ で表わされる. ただし, $\mathrm{Ext}_A^0(T,N)=\mathrm{Hom}_A(T,N)$ である.

演習　これを証明せよ.

命題　T が射影 A-加群ならば, $n>0$ について $\mathrm{Ext}_A^n(T,N)=0$ である.

演習　これを証明せよ.

A が次数付き多元環ならば, A-加群 $\mathrm{Tor}_n^A(T,N)$ と $\mathrm{Ext}_A^n(T,N)$ はいずれも次数付きであることに注意する.

$[\mathrm{Ext}_A^n(T,N)]_q$ の代わりに, 記号 $\mathrm{Ext}_A^{n,q}(T,N)$ を用いる. したがって

$$\mathrm{Ext}_A^{n,q}(T,N)=\frac{\mathrm{Ker}\,([\mathrm{Hom}_A(A_n,N)]_q\to[\mathrm{Hom}_A(A_{n+1},N)]_q)}{\mathrm{Im}\,([\mathrm{Hom}_A(A_{n-1},N)]_q\to[\mathrm{Hom}_A(A_n,N)]_q)}$$

演習　$A=\boldsymbol{Z}$ とする. この場合次を証明せよ:

(1) 任意の T, N と $n\geq 2$ について, $\mathrm{Tor}_n^A(T,N)=\mathrm{Ext}_A^n(T,N)=0$.

(2) T と N が有限生成群ならば，$\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{Z}}(T,N)=\mathrm{Tors}\ T\otimes \mathrm{Tors}\ N$.

(3) 任意の G に対して，$\mathrm{Ext}_1^A(\boldsymbol{Z},G)=0$，$\mathrm{Ext}_1^A(\boldsymbol{Z}_n,G)\cong G/nG$. 特に $\mathrm{Ext}_1^A(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{Z})\cong\boldsymbol{Z}_n$, $\mathrm{Ext}_1^A(\boldsymbol{Z}_n,\boldsymbol{Z}_m)\cong\boldsymbol{Z}_{(n,m)}$. したがって，任意の有限生成の T と N について，$\mathrm{Ext}_1^A(T,N)\cong(\mathrm{Tors}\ T)\otimes N$.

§32. スペクトル系列の構成

位相空間 X が与えられたとき，安定ホモトピー群 $\pi_q^S(X)$，すなわち，$N\gg q$ のときのホモトピー群 $\pi_{N+q}(\Sigma^N X)$ を決定したい.（主要な場合は2点から成る空間 $X=S^0$ であり，このとき $\pi_q^S(X)=\pi_{N+q}(S^N)$ である.）

以前と同様，$\mathscr{A}=\mathscr{A}_{(p)}$ は Steenrod 代数を表わす. $H^*(X;\boldsymbol{Z}_p)$ を $H^*(X)$，ただし p は素数，$H^*(X,*)$ を $\tilde{H}^*(X)$ と書く. すなわち $\tilde{H}^0(X)=H^0(X)/\boldsymbol{Z}_p$ かつ $i>0$ のとき $\tilde{H}^i(X)=H^i(X)$ である.

$\mathscr{A}$ は $H^*(X)$ に作用するので，$\tilde{H}^*(X)$ を $\mathscr{A}$-加群とみなしたほうがよい.（ここで，つねに，非負次数で次数付けられている加群を扱わなければならない. すなわち，負の添字をもつ項は，$\tilde{H}^*(X)$ の場合と同様，自明であることに注意する.）この $\mathscr{A}$-加群においてある生成元系を選ぼう. これにより自由 $\mathscr{A}$-加群 B_1 から $\tilde{H}^*(X)$ の上への全射準同型を定義する：

$$B_1\to\tilde{H}^*(X)\to 0$$

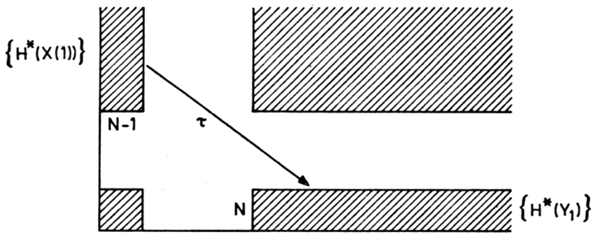
簡単のために，X は有限型の複体（$\Longleftrightarrow$各次数について胞体の個数は有限）と仮定する. このとき，扱うすべての加群は各次数について有限個の生成元をもつ. 上の全射の核を考える. 一般に，これは自由でないから，同じ方法を繰り返す. このようにして次の完全系列(自由分解)

$$\cdots\to B_4\to B_3\to B_2\to B_1\to\tilde{H}^*(X)\to 0$$

を得る. $\mathscr{A}$-加群 B_i は確かに何らかの空間のコホモロジー群（これは，例えば $2i>\deg x$ について関係式 $\mathscr{P}_p^i(x)=0$ が成り立つことを意味する）ではない. これらの $\mathscr{A}$-加群をコホモロジー群で「近似」したいならば，$\mathscr{A}$-加群 $H^*(K(\boldsymbol{Z}_p,n))$ は関係式の最小系をもつから，空間 $K(\boldsymbol{Z}_p,n)$ を選ぶのが妥当のように思われる.

N は十分大きい自然数とする. $\mathscr{A}$-加群 $H^*(\Sigma^N X)$ と $H^*(X)$ は次数付けが異なるだけである. $\alpha_i\in H^{q_i}(X)$ を B_1 の自由な生成元の像，すなわち，$\mathscr{A}$-加群 $H^*(X)$ において選ばれた生成元とする. 元 $\Sigma^N\alpha_i\in H^{N+q_i}(\Sigma^N X)$ に対応し

て構成される写像 $\Sigma^N X \to K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i)$ を考える．ただし，$q_i<N$ とする．これらの写像を用いて，写像 $\Sigma^N X \to Y_1 = \Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i)$ を定義する．このとき，$\mathscr{A}$-加群 $H^*(Y_1)$ は次数 N から $2N$ において，それぞれ次数 0 から N における $\mathscr{A}$-加群 B_1 と一致する．写像 $\Sigma^N X \to Y_1$ は準同型 $H^*(Y_1) \to H^*(\Sigma^N X)$ を誘導し，これは次数 N から $2N$ において次数 0 から N で与えられた準同型 $B_1 \to H^*(X)$ と一致する．ここで写像 $\Sigma^N X \to Y_1$ はファイバー空間と考えてよい．このファイバーを $X(1)$ で表わし，さらに $X(0)=X$ とおく．一般の場合に，$H^*(X(1))$ を完全に描写することは難しいかもしれないが，次数を 1 だけずらすことを除けば，次数 $\leqq 2N-3$ では，$\mathscr{A}$-加群 $H^*(X(1))$ が $\mathscr{A}$-加群 Ker $[\tilde{H}^*(Y_1) \to H^*(\Sigma^N X)]$ に同型であることは容易にわかる．実際，このファイバー空間 $\Sigma^N X \xrightarrow{X(1)} Y_1$ のスペクトル系列を考えればよい：



(次数が 1 ずれる理由は，転入 τ が次数を 1 だけ増やすためである.) したがって，次数 $N-1$ から $2N-3$ の $\tilde{H}^*(X(1))$ は，次数を $N-1$ だけずらすことにより次数 0 から $N-2$ の Ker $[B_1 \to H^*(X)]$ に $\mathscr{A}$-加群として同型である．

注意　もちろん $X(1)$ は，写像 $\Sigma^N X \to Y_1$ のファイバーとしてばかりでなく，写像 $\Sigma^N X \to Y_1$ によりファイバー空間 $* \xrightarrow{\Pi_i(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i-1)} \Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i) = Y_1$ から誘導されるファイバー空間 $X(1) \xrightarrow{\Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i-1)} \Sigma^N X$ の全空間としても定義することができる．ここで，空間 $X(1)$ ばかりでなく，写像 $X(1) \to \Sigma^N X$

$$\begin{array}{ccc} X(1) & \longrightarrow & * \\ \Big\downarrow \Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i-1) & & \Big\downarrow \Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i-1) \\ \Sigma^N X & \xrightarrow{X(1)} & \Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i) = Y_1 \end{array}$$

も定義したことになることを強調しておく．$X(1)$ と写像はいずれもホモトピー同値を除いて一意的に定義される．

次に，上で $\Sigma^N X$ に適用した方法を空間 $X(1)$ に繰り返す．すなわち，（全射 $B_2 \to \mathrm{Ker}\,[B_1 \to \tilde{H}^*(X)]$ があることを思いおこして）$\mathscr{A}$-加群 $\tilde{H}^*(X(1))$ において（次数 $2N-3$ まで）$\mathscr{A}$-加群 B_2 の自由な生成元と一対一対応にある生成元系を選ぶ．ただし，それぞれの次数の間の差は $N-1$ である．$\beta_i \in H^{N-1+r_i}(X(1))$ はこれらの生成元とし，これらにより写像 $X(1) \to Y_2 = \Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N-1+r_i)$ を構成する．$\mathscr{A}$-加群 $\tilde{H}^*(Y_2)$ と B_2 は，$H^{2N-3}(Y_2)$ までは次数を $N-1$ ずらして一致する．写像 $X(1) \to Y_2$ にホモトピー同値なファイバー空間のファイバーを $X(2)$ と表わす．したがって，次の空間 $X(2)$ と写像 $X(2) \to X(1)$ を得たことになる．この構成を繰り返して，引き続いておこる空間の系列

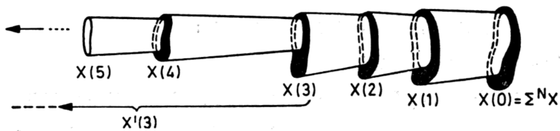
$$\cdots \to X(2) \to X(1) \to \Sigma^N X = X(0)$$

を得る．ただし各 $X(i)$ は，全空間が $X(i-1)$ にホモトピー同値であり，底空間 Y_i が $K(\boldsymbol{Z}_p, m)$ 型の空間の積であるファイバー空間のファイバーである．

$n \ll N$ を固定する．次数 $(N-i+1)+n$ までの $\mathscr{A}$-加群 $\tilde{H}^*(Y_i)$ と次数 n までの B_i は，それぞれの次数の差 $N-i+1$ を除いて一致する．（実は，$\tilde{H}^*(Y_i)$ と B_i はもっと高い次数でも，それぞれ次数 $2N$ と N まで一致する．これは，N と n を無限にして考えるので，問題にはならない．）

一方，写像 $X(i) \to X(i-1)$ もファイバー空間と考えてよい．そのファイバー Z_i は，Y_i と同じ個数の $K(\boldsymbol{Z}_p, m')$ 空間の積であるが，各空間は Y_i の積のそれぞれの空間よりも 1 だけ小さい自然数 m' をもっている．（許された次数では，$Z_i = \Omega Y_i$ または $\Sigma Z_i = Y_i$ と仮定してよい．）$\mathscr{A}$-加群 $\tilde{H}^*(Z_i)$ は，次数を $N-1$ ずらした B_i に同型である．さらに，次数 $N-i+n$ までの $\tilde{H}^*(X(i))$ は次数を $N-i$ ずらして，それぞれ，$i \geq 2$ については準同型 $B_i \to B_{i-1}$ の核，$i=1$ については準同型 $B_1 \to \tilde{H}^*(X)$ の核と一致する．最終的に，合成写像 $Z_i \subset X(i) \to Y_{i+1}$ は分解における準同型 $B_i \to B_{i-1}$ と（次数の差を除いて）一致する準同型 $\tilde{H}^*(Y_{i+1}) \to H^*(Z_i)$ を誘導する．なお，各 $X(q)$ は $(N-1)$ 連結であることに注意しておくべきであろう．実際，$X(1)$ の場合にこれを確かめよう．$\tilde{H}^*(X(1))$ と $\mathrm{Ker}\,[B_1 \to \tilde{H}^*(X)]$ の次数の差は $N-1$ である．さて，$\tilde{H}^0(X)$ の元には関係式はないから，この核は次数 0 では自明である．したがって，$\mathrm{Ker}\,[B_1 \to \tilde{H}^*(X(1))]_0 = 0$ かつ $\tilde{H}^{N-1}(X(1)) = 0$ である．$j < i$ について $\mathrm{Ker}\,[B_i \to B_{i-1}]_j = 0$ であることを用いて，同様に任意の i について $X(i)$ は $(N-1)$ 連結であることを証明できる．

次に，$X(i)$ の写像の系列をフィルター付けに変える．すなわち，これらの写像を埋込みに変えよう．各写像 $X(i)\to X(i-1)$ の写像柱を構成し，ついで，これらを次の図に示されているように互いに接着する（得られた空間は**テレスコープ**とよばれる）：



$X'(k)$ は（上の図で）$X(k)$ から左にあるテレスコープの部分を表わす．包含系列

$$\cdots\subset X'(k)\subset\cdots\subset X'(2)\subset X'(1)\subset X'(0)$$

は明らかに次の系列

$$\cdots\to X(k)\to\cdots\to X(2)\to X(1)\to X(0)=\Sigma^N X$$

にホモトピー同値である．以下，$X'(k)$ の代わりに $X(k)$ と書く．すべての構成はホモトピー同値を除いて行なっているので，このようにしてもよい．以下では，$\Sigma^N X=X(0)=X(-1)=X(-2)=\cdots$ として，フィルター付けは両方向に無限にあると考えるほうが便利である．（ここにおける記号は§18のものと一貫していない．フィルター付けの添字は逆向きである．）

Adams スペクトル系列は，§18 で Leray スペクトル系列に対してすでに用いた同じ構成を上のフィルター付けに適用して得られる．主要な差は，むしろホモロジー群よりもホモトピー群を使うことにある．一般にホモトピー群は，$\pi_q(A,B)\cong\pi_q(A/B)$ という同型が成り立たないので，スペクトル系列に適用できない．しかしながら，われわれは安定次数に制限するので，これを用いる．上で得られた対の間の写像 $(X(s),X(s+r))\to(X(s+1-r),X(s+1))$，ただし $r\geq 1$，を考え，等式

$$E_r^{s,t}=\mathrm{Im}\left[\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+r))\to\pi_{N+t-s}(X(s+1-r),X(s+1))\right]$$

により群 $E_r^{s,t}$ を導入する．ただし，ホモトピー群の準同型は射入により誘導されたものであり，$t\leq n-r$ である．t に関する制限の理由を明らかにしよう．N を固定すると，$E_r^{s,t}$ に関する等式は任意の r,s,t について正しい．この群はどのように N に依存しているのであろうか？ 空間 $X(m)$ は次数 N から

$N-m+n$ までは N に依存しないコホモロジー群をもつ．N にもっと大きい数 M を代入して，$X(m)$ を次数 $M-m+n$ まで $\Sigma^{M-N}X(m)$ にホモトピー同値なもう1つの空間 $\tilde{X}(m)$ で置き換える．このとき，t の制限の下で $E_r^{s,t}$ は N に無関係になる．したがって，N と n を十分大きくとっても変わらず，任意の r,s,t に対して $E_r^{s,t}$ を定義できる．

また，次の同値な定義を与えることもできる：

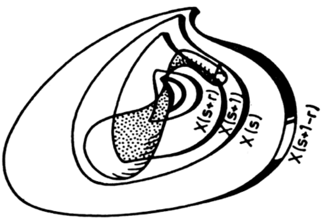
$E_r^{s,t}=G_r^{s,t}/D_r^{s,t}$，ただし

$$G_r^{s,t}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+r))\to\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+1))]$$

$$D_r^{s,t}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s+1}(X(s+1-r),X(s))\to\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+1))]$$

(これが Adams によって与えられた元来の定義である.)　ここで群 $G_r^{s,t}$ は射入 $(X(s),X(s+r))\to(X(s),X(s+1))$ により誘導された準同型の像であり，$D_r^{s,t}$ は，3対 $(X(s+1-r),X(s),X(s+1))$ の完全系列の境界準同型の像である．

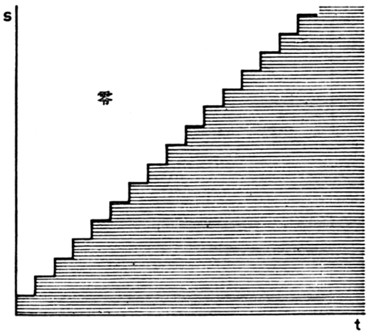
これらの定義の同値性を示すために，$X(s+1-r)\supset X(s)\supset X(s+1)\supset X(s+r)$ の絵を描く：



$D_r^{s,t}$ の元は，相対球写像 mod $X(s+1)$ とみなした S^{N+t-s} から $X(s)$ への絶対球写像により表わされた類である．これらの元は，$D_r^{s,t}\cong\mathrm{Ker}\,[\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+1))\to\pi_{N+t-s}(X(s+1-r),X(s+1))]$ であるので $X(s+1-r)$ 全体で考えると零ホモトープである．$G_r^{s,t}$ の元は，$X(s)$ mod $X(s+1)$ への相対球写像として考えられた $X(s)$ mod $X(s+r)$ への相対球写像により表わされる．($X(s+1)\supset X(s+r)$ に注意する.)　明らかに $G_r^{s,t}\supset D_r^{s,t}$ である．さて商群 $G_r^{s,t}/D_r^{s,t}$ を構成するために，さらに $X(s+1-r)$ mod $X(s+1)$ への相対球写像を考えなければならない．この最後の段階で，射入により誘導された $\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+r))$ から $\pi_{N+t-s}(X(s+1-r),X(s+1))$ への準同型による像を考えた．これがまさしく，最初の定義において与えられた $E_r^{s,t}$ である．

次に，群 $E_r^{s,t}$ をもっと詳細に考察しよう．この群は各 $r\geq 1, s\geq 0, t\geq 0$ について定義されており，さらに，すべての $X(s)$ は $(N-1)$ 連結であるから，定義より明らかにわかるように，$t<s$ について $E_r^{s,t}=0$ である．

$E_r=\bigoplus_{s,t}E_r^{s,t}$ と書く．これは次の図で示される：



r が増加するときの E_r の性質を観察しよう．（微分はまだ導入されていないのでスペクトル系列については言及しない．）そこで r を増加させる．s と t を固定すると $r=s+1$ において群 $\pi_{N+t-s}(X(s+1-r), X(s+1))$ は安定化し，任意の十分大きい r について，$\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))$ に等しい．対 $(X(s), X(s+r))$ については演繹(アプリオリ)的な情報がないので，$\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r))$ についてはこのようなことは何も言えない．一般に，$E_r^{s,t}$ が安定化すると期待できる理由は何もない．スペクトル系列の収束問題には特別な考察が必要である．

明らかに，$\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r+1))\rightarrow\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))]$ は $\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r))\rightarrow\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))]$ の部分群である．というのは，前者の準同型は，後者の準同型と自然な準同型 $\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r+1))\rightarrow\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r))$ の合成であるから．したがって，極限群 $E_\infty=\bigoplus_{s,t}E_\infty^{s,t}$ は $E_\infty^{s,t}=\bigcap_r E_r^{s,t}$ により定義してよい．極限を定義するために

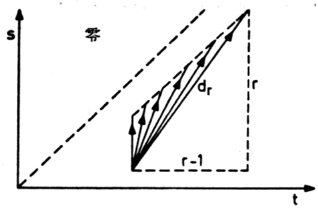
$$G_\infty^{s,t}=\bigcap G_r^{s,t}$$

$$D_\infty^{s,t}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s+1}(\Sigma^N X, X(s))\rightarrow\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+1))]$$

とおいて，第2の定義 $E_\infty^{s,t}=G_\infty^{s,t}/D_\infty^{s,t}$ を用いてもよい．

次に，微分 $d_r^{s,t}: E_r^{s,t}\rightarrow E_r^{s+r,t+r-1}$ を定義する．Adams スペクトル系列にお

ける添字のつけ方は Leray スペクトル系列とまったく異なるものであることを思いおこそう．すなわち，微分 $d_r^{s,t}$ は第1象限の2等分線に近い方向に沿って作用する．



3対 $(X(s), X(s+r), X(s+2r))$ と $(X(s+1-r), X(s+1), X(s+r+1))$ およびそのホモトピー完全系列の境界準同型を考える．このとき，次の図がある：

$$\begin{array}{ccc} \pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r)) & \xrightarrow{\partial_1} & \pi_{N+(t+r-1)-(s+r)}(X(s+r), X(s+r+r)) \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \pi_{N+t-s}(X(s+1-r), X(s+1)) & \xrightarrow{\partial_2} & \pi_{N+(t+r-1)-(s+r)}(X(s+1), X(s+r+1)) \end{array}$$

定義により，$d_r^{s,t}$ は $\pi_{N+t-s}(X(s+1-r), X(s+1))$ の部分群である $E_r^{s,t}=\mathrm{Im}\, f$ への ∂_2 の制限である．これはその値を $E_r^{s+r,t+r-1}=\mathrm{Im}\, g$ にとる．明らかに，$d_r^{s+r,t+r-1}\circ d_r^{s,t}=0$ である．

さて，部分的にこれまで議論して来た主定理をここで明文化するのが最も良いであろう．

Adams の定理

定理 X は有限型の CW 複体，p は素数とする．このとき，微分 $d_r^{s,t}: E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,t+r-1}$ をもつスペクトル系列 $\{E_r^{s,t}=E_r^{s,t}(X)\}$ が存在して，次の条件を満たす：

(0) $s<0$ または $t<s$ ならば，$E_r^{s,t}=0$ （特に $t<0$ のとき $E_r^{s,t}=0$），

(1) 次の標準的な同型がある：

$$E_2^{s,t}\cong \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(\tilde{H}^*(X),\ \boldsymbol{Z}_p)$$

（ここで，$\boldsymbol{Z}_p$ は，$\mathscr{A}$ の自明な作用をもち，次数0の唯1つの生成元をもつ $\mathscr{A}$-加群と考える．）

(2) 次の標準的な同型がある：

$$E_{r+1}^{s,t} \cong \mathrm{Ker}\, d_r^{s,t} / \mathrm{Im}\, d_r^{s-r,t-r+1}.$$

(3) $r>s$ のとき $\mathrm{Im}\, d_r^{s-r,t-r+1}=0$ であり，したがって $E_k^{s,t} \subset E_r^{s,t} (s<r<k)$ である．また $E_\infty^{s,t} = \bigcap_{s<r<\infty} E_r^{s,t}$ とおくとき，群 $B^{s,t} \subset \pi_{t-s}^S(X)$ が存在して

$$B^{s,t} \subset B^{s-1,t-1} \subset \cdots \subset B^{0,t-s} = \pi_{t-s}^S(X)$$

かつ $E_\infty^{s,t} \cong B^{s,t}/B^{s+1,t+1}$ が成り立つ．

(4) $\bigcap_{t-s=m} B^{s,t} = K^m$ は，位数が有限かつ p と素である $\pi_{t-s}^S(X)$ のすべての元の部分群である．

証明　群 $E_r^{s,t}$ と微分 $d_r^{s,t}$ はすでに定義されている．E_1 と E_2 の構造を解明しよう．定義により $E_1^{s,t} = \pi_{N+t-s}(X(s), X(s+1))$ である．空間 $X(k)$ の構成からわかるように，ファイバー空間 $X(s) \xrightarrow{X(s+1)} \Pi K_m$ が存在し，したがって，すべての q について $\pi_q(X(s), X(s+1)) \cong \pi_q(\Pi K_m)$ である．このとき，

$$E_1 = \oplus_{s,t} E_1^{s,t} = \oplus_{s,t} \pi_{N+t-s}(X(s), X(s+1)) \cong \oplus_{s,t} \pi_{N+t-s}(\Pi K_m)$$

(ここで，$K_m = K(\boldsymbol{Z}_p, m)$ であり，$N \gg t-r=t-1$ であることを思いおこす．したがって，N は t に依存し，よって，定義に N を含む空間 $X(s)$ と $X(s+1)$ も t に依存する．しかしながら，群 $\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+1))$ は，N が十分大きければ何にも依存せず，したがって，すべての項は矛盾なく定義される．)

群 $E_1^s = \oplus_t E_1^{s,t}$ を考える．これはさらに $\oplus_t \pi_{N+t-s}(\Pi K_m) \cong \oplus_t \boldsymbol{Z}_p$ に等しい．ただし，$\boldsymbol{Z}_p$ は $N+t-s$ が直積 ΠK_m にある次数 m の 1 つに一致するような各 t について現われる．その結果 $t \ll N$ に対して直和における項 $\boldsymbol{Z}_p$ は $\mathscr{A}$-加群 $H^*(\Pi K_m)$ の生成元と一対一対応にあり，同じ次数をもつ．したがって，これらは $\mathscr{A}$-加群 B_s の生成元と一対一対応にあり，$N-s$ だけ大きい次数をもつ．言いかえれば，$\pi_{N+t-s}(\Pi K_m) \cong [\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_s, \boldsymbol{Z}_p)]_t$ である．

準同型 $B_s \to \boldsymbol{Z}_p$ は $\mathscr{A}$-加群 B_s の任意の生成元を $\boldsymbol{Z}_p$ の任意の元に写し，一方，$\varphi(\alpha)$ という形の任意の元，ただし $\varphi \in \mathscr{A}^q, q>0$，は必然的に 0 に写される．したがって，$\boldsymbol{Z}_p$ 上のベクトル空間として $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_s, \boldsymbol{Z}_p)$ は $\mathscr{A}$-加群 B_s の生成元の 1 つを $1 \in \boldsymbol{Z}_p$ に写し，残りを 0 に写す準同型 $B_s \to \boldsymbol{Z}_p$ により生成される．任意のこのような準同型は次数つき加群 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_s, \boldsymbol{Z}_p)$ において生成元そのものと同じ次数をもつ．以上より，次数に関して

$$E_1^{s,t} \cong [\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_s, \boldsymbol{Z}_p)]_t$$

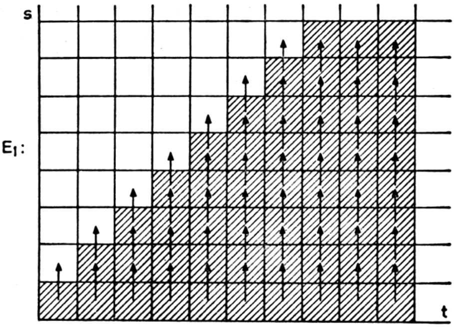
であり，

$$\oplus_t E_1^{s,t} \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_s, \boldsymbol{Z}_p)$$

であると結論できる.

準同型 $d_1^{s,t}: E_1^{s,t} \to E_1^{s+1,t}$, すなわち, $d_1^{s,t}: [\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_s, \boldsymbol{Z}_p)]_t \to [\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_{s+1}, \boldsymbol{Z}_p)]_t$ を考える. これは容易に確かめられるように, 写像 $B_{s+1} \to B_s$ により誘導される準同型と一致する. したがって, Adams の定理の命題 (2) が証明されればすぐに次の同型が出る:

$$E_2^{s,t} \cong \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(\tilde{H}^*(X), \boldsymbol{Z}_2)$$



次に, 命題 (2), すなわち

$$\mathrm{Ker}\, d_r^{s,t}/\mathrm{Im}\, d_r^{s-r,t-r+1} \cong E_{r+1}^{s,t}$$
$$= \mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r+1)) \to \pi_{N+t-s}(X(s-r), X(s+1))]$$

を証明する. まず $\mathrm{Ker}\, d_r^{s,t}/\mathrm{Im}\, d_r^{s-r,t-r+1}$ を調べよう. ただし

$$d_r^{s,t}: E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,t+r-1} \quad \text{および} \quad d_r^{s-r,t-r+1}: E_r^{s-r,t-r+1} \to E_r^{s,t}$$

である. $d_r^{s,t}$ の定義により, 図式

$$\begin{array}{ccc} \pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r)) & \xrightarrow{\partial_1} & \pi_{N+t-s-1}(X(s+r), X(s+2r)) \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \pi_{N+t-s}(X(s+1-r), X(s+1)) & \xrightarrow{\partial_2} & \pi_{N+t-s-1}(X(s+1), X(s+r+1)) \end{array}$$

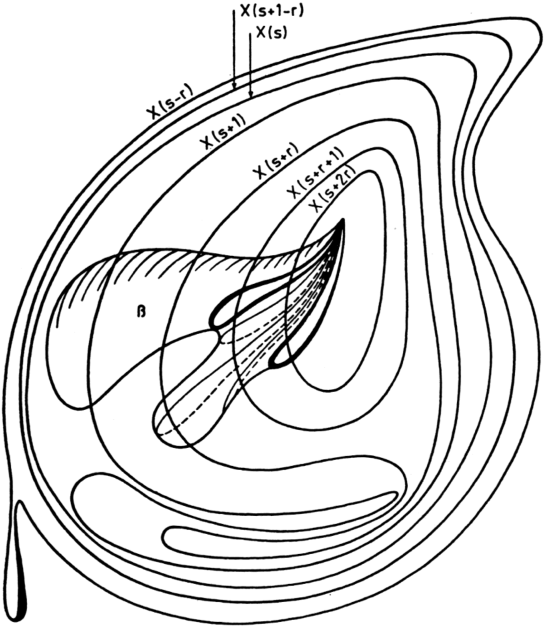
において

$$d_r^{s,t} = \partial_2|_{\mathrm{Im}\, f}$$

である. 次の空間の包含系列

$$X(s-r) \supset X(s+1-r) \supset X(s) \supset X(s+1)$$
$$\supset X(s+r) \supset X(s+r+1) \supset X(s+2r)$$

を考える. 元 $\alpha\in E_r^{s,t}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+r))\to\pi_{N+t-s}(X(s+1-r),X(s+1))]$ は, 自然な準同型により, ある元 $\beta\in\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+r))$ の像である. (β を表わす球写像は次の絵で示されている.)



$d_r^{s,t}\alpha=0$ と仮定する. このとき, 前ページの図式の可換性から $g\partial_1(\beta)=0$ であり, これは $X(s+1)$ への $(N+t-s-1)$ 次元の球写像として, β の境界を表わす写像が $X(s+r+1)$ への球写像にホモトープであることを意味する. このとき β は球写像 mod $X(s+1)$ と考えて, $X(s)$ の球写像にホモトープ mod $X(s+r+1)$ である. その結果, α は $E_r^{s,t}$ ばかりでなく, もっと小さい群 $\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+r+1))\to\pi_{N+t-s}(X(s+1-r),X(s+1))]$ にも属する.

逆に, α がこの群に属するならば $d_r^{s,t}\alpha=0$, すなわち, $\mathrm{Ker}\,d_r^{s,t}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+r+1))\to\pi_{N+t-s}(X(s+1-r),X(s+1))]$ である. ここで, 準同型 $\pi_{N+t-s}(X(s+1-r),X(s+1))\to\pi_{N+t-s}(X(s-r),X(s+1))$ は次の準同

型

$$\operatorname{Ker} d_r^{s,t} = \operatorname{Im}[\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r+1)) \to \pi_{N+t-s}(X(s+1-r), X(s+1))]$$
$$\to \operatorname{Im}[\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r+1)) \to \pi_{N+t-s}(X(s-r), X(s+1))] = E_{r+1}^{s,t}$$

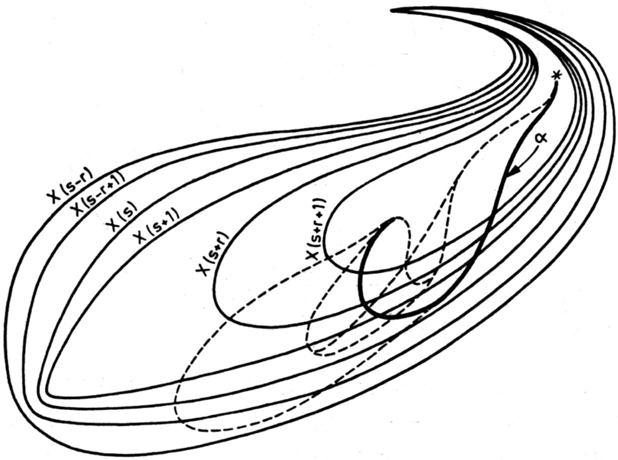
を誘導する．この準同型の核は $\operatorname{Im} d_r^{s-r,t-r+1}$ であることが示される．実際，$d_r^{s-r,t-r+1}$ の定義により，次の図式

$$\begin{array}{ccc} \pi_{N+t-s+1}(X(s-r), X(s)) & \xrightarrow{\partial_3} & \pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r)) \\ \downarrow f' & & \downarrow g' \\ \pi_{N+t-s+1}(X(s+1-2r), X(s+1-r)) & \xrightarrow{\partial_4} & \pi_{N+t-s}(X(s+1-r), X(s+1)) \end{array}$$

において

$$d_r^{s-r,t-r+1} = \partial_4|_{\operatorname{Im} f'}$$

である．もし，$\pi_{N+t-s}(X(s+1-r), X(s+1))$ から $\pi_{N+t-s}(X(s-r), X(s+1))$



への準同型で $\alpha \in \operatorname{Ker} d_r^{s,t} \subset \pi_{N+t-s}(X(s+1-r), X(s+1))$ が零に写されるならば，α を表わす相対球写像（上図の連続な線）は対 $(X(s-r), X(s+1))$ において零ホモトープである．このホモトピー $\varphi_t : (D^{N+t-s}, S^{N+t-s-1}) \to (X(s-r), X(s+1))$ は，底面 $D^{N+t-s} \times \{0\}$ を球写像 α に，側面 $S^{N+t-s-1} \times I$ を空間 $X(s+1)$ に，上面 $D^{N+t-s} \times \{1\}$ を基点に写す写像 $D^{N+t-s} \times I = D^{N+t-s+1} \to X(s-r)$ と考えてよい．このようにして，境界は $X(s+1)$ にある部分を付け加えて α から

得られる $X(s-r) \bmod X(s-r+1)$ への $(N+t-s+1)$ 次元の球写像が得られる．最後に，α は $\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+r+1))$ からの像に属することを考慮に入れる．すなわち，α は $(X(s), X(s+r+1))$ への相対球写像と考えてよく，われわれが構成した球写像は $X(s-r) \bmod X(s)$ への相対球写像と考えてよい．前ページの可換な図式をもう一度眺めよう．可換性より $X(s-r+1) \bmod X(s+1)$ への相対球写像として境界が α と一致する球写像 $\gamma \in \pi_{N+t-s+1}(X(s-r), X(s))$ がある．すなわち，$\alpha = g'\partial_3\gamma \in \mathrm{Im}\, d_r^{s-r,t-r+1}$ である．

逆に，もし α が $d_r^{s-r,t-r+1}$ の像に属するならば，反対向きにこの議論を繰り返して，自然な写像 $\mathrm{Ker}\, d_r^{s,t} \to E_{r+1}^{s,t}$ により α は零に写されることがわかる．これで命題 (2) は証明され，(1) も証明された．

この定理の具体的応用に意味のある (1) に関する注意を１つしておく．

$\mathscr{A}$-加群 $\tilde{H}^*(X)$ の自由分解

$$\cdots \to B_3 \to B_2 \to B_1 \to \tilde{H}^*(X) \to 0$$

をとる．$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(\tilde{H}^*(X), \boldsymbol{Z}_p)$ を計算する必要があるとしよう．最初に，この分解に関手 Hom を適用し，得られた複体のホモロジーを計算しなければならない．分解の選び方は最終的な結果を変えないから，最も便利のよい分解を探す必要がある．そこで $\tilde{H}^*(X)$ において，極小な生成元系を選ぶ．これは，まず最初の自明でない群 $\tilde{H}^q(X)$ において加法生成元系をとり，ついで，２番目に自明でない群の加法生成元系の元のうちで，最初の群 $\tilde{H}^q(X)$ の元から任意のコホモロジー作用素により得られる元に独立な元をこれに付け加え，この操作を繰り返して行なえる．この結果，各 a_k について，いかなる分解 $a_k = \sum_{i \neq k} \varphi_i a_i$, $\varphi_i \in \mathscr{A}$, $\deg \varphi_i > 0$, も不可能であるようなある極小な生成元系 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ が得られる．次に，この選ばれた生成元で生成される自由 $\mathscr{A}$-加群を B_1 とする．ついで準同型 $B_1 \to \tilde{H}^*(X)$ の核における生成元を $\tilde{H}^*(X)$ の場合と同様に選ぶ．以下同様な操作を行なう．このとき，各 k について，準同型 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_k, \boldsymbol{Z}_p) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_{k+1}, \boldsymbol{Z}_p)$ は明らかに自明である．（実際，任意の準同型 $B_k \to \boldsymbol{Z}_p$ は，任意の元 $\sum_i \varphi_i a_i^{(k)}$，ただし，$a_i^{(k)}$ は B_k の生成元かつ $\deg \varphi_i > 0$，を零に写し，問題の準同型 $B_{k+1} \to B_k$ は，B_{k+1} のすべての生成元をこの形の元に写す．）結果として，この分解において複体 $\{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_k, \boldsymbol{Z}_p)\}$ は自明な微分をもち，したがって，

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^k(\tilde{H}^*(X), \boldsymbol{Z}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_k, \boldsymbol{Z}_p)$$

である.

次に Adams の定理の命題 (3) と (4) を証明する．まず次のように書く：

$$B^{s,t}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s))\to\pi_{N+t-s}(X(0))=\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X)=\pi^S_{t-s}(X)]$$

ただし，$X(s)\to X(0)$ は射入である．このとき，次の包含系列

$$\cdots\subset B^{s,t}\subset B^{s-1,t-1}\subset\cdots\subset B^{0,t-s}$$

を得る．ただし，$B^{0,t-s}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(0))\to\pi_{N+t-s}(X(0))]=\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X)\cong\pi^S_{t-s}(X)$ である．このフィルター付けは，各複体 X に対して本質的には無限である.

ここで，$E^{s,t}_\infty\cong B^{s,t}/B^{s+1,t+1}$ かつ $\bigcap_{t-s=m}B^{s,t}=K^m$ を証明しなければならない．ただし，$K^m\subset\pi^S_m(X)$ は位数が有限かつ p に素なすべての元の部分群を表わす.

注意 1　分解の選び方についての注意から直ちにわかるように，E_2 項，したがって E_∞ 項も位数 p の元のみを含む.

注意 2　この命題は $t<s$ または $s<0$ については明らかである．実際，$t<s$ について，$B^{s,t}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s))\to\pi^S_{t-s}(X)]=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s))\to 0]=0$ であり，そして $E^{s,t}_\infty=0$ である．同様にして $s<0$ ならば再び $E^{s,t}_\infty=0$，そして $B^{s,t}=\pi_{N+t-s}(X(0))$ であり，一方 $s+1\leq 0$ なので，$B^{s+1,t+1}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s+1))\to\pi_{N+t-s}(X(0))]=\pi_{N+t-s}(X(0))$ である.

空間のすべての安定ホモトピー群が有限である特別な場合

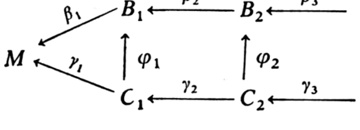
代数的補題　A は体 k 上の単位元をもつ次数付き結合的多元環とする．任意の A-加群 M の射影分解を

$$M\xleftarrow{\beta_1}B_1\xleftarrow{\beta_2}B_2\xleftarrow{\beta_3}\cdots$$

とし，任意の相次ぐ準同型の合成は自明であるような射影 A-加群の系列を

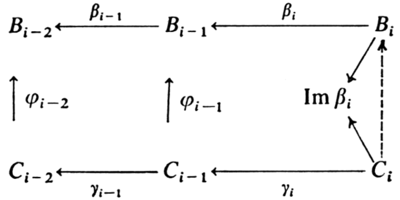
$$M\xleftarrow{\gamma_1}C_1\xleftarrow{\gamma_2}C_2\xleftarrow{\gamma_3}\cdots$$

とするとき，A-準同型 $\varphi_i: C_i\to B_i$ が存在して，次の図式は可換である：



（この補題は B_i の射影性を仮定しなくても成り立つ.）

準同型 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{i-1}$，ただし，$\varphi_0=1_M: M\to M$，が与えられていると仮定する．次の図式



において，$\beta_{i-1}\circ\varphi_{i-1}\circ\gamma_i=\varphi_{i-2}\circ\gamma_{i-1}\circ\gamma_i$ であるから，$\beta_{i-1}\circ\varphi_{i-1}\circ\gamma_i: C_i\to B_{i-2}$ は自明である．したがって，$\mathrm{Im}\,\varphi_{i-1}\circ\gamma_i\subset\mathrm{Ker}\,\beta_{i-1}=\mathrm{Im}\,\beta_i$，すなわち，$\varphi_{i-1}\circ\gamma_i: C_i\to B_{i-1}$ は準同型 $C_i\to\mathrm{Im}\,\beta_i$ であると考えてよい．C_i は射影 A-加群であるから，準同型 $\varphi_i: C_i\to B_i$ が存在して，これと全射準同型 $B_i\to\mathrm{Im}\,\beta_i$ との合成は $\varphi_{i-1}\circ\gamma_i$ と一致する．すなわち，$\beta_i\circ\varphi_i=\varphi_{i-1}\circ\gamma_i$ となる．

Serre のフィルター付け

Adams のフィルター付け

$$\cdots\to X(2)\to X(1)\to\Sigma^N X$$

と共に，Serre の方法によりホモトピー群が消去されるときに生ずる同様なフィルター付けがある．X の最初の自明でないコホモロジー群の次数を m とする．（すなわち，$j<m$ について $\tilde{H}^j(X;\boldsymbol{Z}_p)=0$ である．$\tilde{H}^0(X;\boldsymbol{Z}_p)\neq 0$ ならば X は連結ではなく，したがって $\pi_0^S(X)\cong\boldsymbol{Z}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}$ である．ただし，直和因子の個数は連結成分の個数 -1 に等しく，これはホモトピー群が有限である仮定に明らかに矛盾するので，$m>0$ である．）

積空間 $K(H^m(X;\boldsymbol{Z}_p), N+m)=K(\boldsymbol{Z}_p, N+m)\times\cdots\times K(\boldsymbol{Z}_p, N+m)$ を $\tilde{Y}_1$ で表わす．$f:\Sigma^N X\to\tilde{Y}_1$ は群 $H^{N+m}(\cdots;\boldsymbol{Z}_p)$ の同型を誘導する（ホモトピーを除いて一意的に定義される）写像とし，$\tilde{X}_1$ はホモトピー同値なファイバー空間のファイバーとする．f が誘導する準同型 $f_*:\pi_{N+m}(\Sigma^N X)\to\pi_{N+m}(\tilde{Y}_1)$ はファイバー空間の完全系列からわかるように，明らかに核 $\pi_{N+m}(\tilde{X}_1)$ をもつ全射準同型である．したがって，$\pi_{N+m}(\tilde{X}_1)$ の位数は $\pi_{N+m}(\Sigma^N X)$ の位数より小さい．

この構成を繰り返して，次のキリング空間と写像の系列を得る：

$$\cdots\to\tilde{X}_2\to\tilde{X}_1\to\Sigma^N X$$

($N+n$ までの) $\Sigma^N X$ のホモトピー群 $\pi_{N+q}(\Sigma^N X)$ は任意の $q<n$ について有限であるから，ある s_0 が存在して，$s>s_0$ について，$\pi_{N+q}(X(s))$ の位数は p によって割り切れない．このようにして得られる空間の系列は **Serreのフィルター付け** とよばれる．われわれの目的は，次の図式が可換であるような写像 f_s: $X(s)\to\tilde{X}_s$ を求めることである．

$$\begin{array}{ccccccc} & X(1) & \longleftarrow & X(2) & \longleftarrow & X(3) & \longleftarrow \\ \swarrow & & & & & & \\ \Sigma^N X & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & \\ \nwarrow & & & & & & \\ & \tilde{X}_1 & \longleftarrow & \tilde{X}_2 & \longleftarrow & \tilde{X}_3 & \longleftarrow \end{array}$$

AdamsのフィルターけからSerreフィルター付けへの写像

$\tilde{Y}_i$ はSerreのフィルター付けの定義において用いられた空間とする．このときファイバー空間 $\tilde{X}_i\xrightarrow{\tilde{X}_{i+1}}\tilde{Y}_{i+1}$ と $\tilde{X}_{i+1}\xrightarrow{\tilde{Z}_{i+1}}\tilde{X}_i$ がある．ただし(安定次元において) $\tilde{Y}_{i+1}=\Sigma\tilde{Z}_{i+1}$ である．2番目のファイバー空間は2つの準同型，すなわち，次数を保つもの $\tilde{H}^*(\tilde{X}_{i+1})\to\tilde{H}^*(\tilde{Z}_{i+1})$ と次数を1増やすもの $\tilde{H}^*(\tilde{Z}_{i+1})\to\tilde{H}^*(\tilde{X}_i)$ を誘導する．後者は転入であり，安定次元においてのみ定義される．安定次元において，これらは合成により，次数を1増やす $\mathscr{A}$-準同型 $\tilde{H}^*(\tilde{Z}_{i+1})\to\tilde{H}^*(\tilde{X}_i)\to\tilde{H}^*(\tilde{Z}_i)$ を定義する．C_i は，$q<n$ について $[C_i]_q=H^{N-i+q}(\tilde{Z}_i\,;\boldsymbol{Z}_p)$ を満たす自由 $\mathscr{A}$-加群を表わすものとする．このとき，上の準同型 $\tilde{H}^*(\tilde{Z}_{i+1})\to\tilde{H}^*(\tilde{Z}_i)$ は次数を保つ $\mathscr{A}$-準同型 $C_{i+1}\to C_i$ を定義する．準同型 $C_1\to\tilde{H}^*(X)$ を写像 $\Sigma^N X\to\tilde{Y}_1=\Sigma\tilde{Z}_1$ により定義する．この結果，次の自由 $\mathscr{A}$-加群の系列

$$\cdots\to C_2\to C_1\to\tilde{H}^*(X)$$

が得られる．ここで，任意の相次ぐ準同型の合成は明らかに零である．(準同型の合成 $\tilde{H}^*(\tilde{X}_{i+1})\to\tilde{H}^*(\tilde{Z}_{i+1})\to\tilde{H}^*(X_i)$ はすでに自明である．)

代数的補題によれば，次の可換図がある：

$$\begin{array}{ccccccc} & B_1 & \longleftarrow & B_2 & \longleftarrow & B_3 & \longleftarrow \\ \swarrow & & & & & & \\ \tilde{H}^*(X) & \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \varphi_2 & & \uparrow \varphi_3 & \\ \nwarrow & & & & & & \\ & C_1 & \longleftarrow & C_2 & \longleftarrow & C_3 & \longleftarrow \end{array}$$

準同型 $\varphi_1 : C_1 \to B_1$ は，写像 $g_1 : Y_1 \to \tilde{Y}_1$ を定義し（安定次元で次数付けを除き）$g_1^* = \varphi_1$ である．さらに，$\tilde{Y}_1 = K(\pi, N+m)$ と Eilenberg-MacLane 空間への写像に関する定理からわかるように，次の図式はホモトピー可換である：

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \tilde{Y}_1 \\ \Sigma^N X & & \uparrow g_1 \\ & \searrow & Y_1 \end{array}$$

$\Sigma^N X$ から Y_1 と $\tilde{Y}_1$ への写像がファイバー空間ならば，前者のファイバー $X(1)$ は後者のファイバー $\tilde{X}_1$ に含まれ，したがって，写像 $f_1 : X(1) \to \tilde{X}_1$ が存在する．このとき，再び次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} H^*(X(1)) & \xleftarrow{f_1^*} & H^*(\tilde{X}_1) \\ \downarrow \tau_1 & & \downarrow \tau_2 \\ H^*(Y_1) & \xleftarrow{g_1^*} & H^*(\tilde{Y}_1) \end{array}$$

（安定次元において次数付けを除き）$g_2^* = \varphi_2$ を満たす写像 $g_2 : Y_2 \to \tilde{Y}_2$ を構成し，次の図式を考える：

$$\begin{array}{ccc} H^*(Y_2) & \xleftarrow{g_2^*} & H^*(\tilde{Y}_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(X(1)) & \xleftarrow{f_1^*} & H^*(\tilde{X}_1) \\ \downarrow \tau_1 & & \downarrow \tau_2 \\ H^*(Y_1) & \xleftarrow{g_1^*} & H^*(\tilde{Y}_1) \end{array}$$

この図式の下の小さい長方形と大きい長方形は可換であり，τ_1 は（再び安定次元において）単射準同型である．したがって，Eilenberg-MacLane 空間への写像に関する定理により，この図式の上の小さい長方形の可換性と次の図式のホモトピー可換性がわかる：

$$\begin{array}{ccc} Y_2 & \xrightarrow{g_2} & \tilde{Y}_2 \\ \uparrow X(2) & & \uparrow \tilde{X}_2 \\ X(1) & \xrightarrow{f_1} & \tilde{X}_1 \end{array}$$

これにより，ファイバーの間の写像 $f_2 : X(2) \to \tilde{X}_2$ を定義することが可能になり，次の図式

$$\begin{array}{ccc} X(2) & \longrightarrow & X(1) \\ {\scriptstyle f_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ \tilde{X}_2 & \longrightarrow & \tilde{X}_1 \end{array}$$

もホモトピー可換となる．

さらに，この構成を同様に続けていくことができる．

基本的補題

補題　任意の s と $q<n$ および十分大きい M に対して，写像 $X(s+M)\to X(s)$ の誘導する準同型 $\pi_{N+q}(X(s+M))\to\pi_{N+q}(X(s))$ は p 成分について自明である．

証明　前出の構成を考えれば，次の図式

$$\begin{array}{ccccccc} & \swarrow & X(1) & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & X(M) \\ \Sigma^N X & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_M} \\ & \nwarrow & \tilde{X}_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \tilde{X}_M \end{array}$$

および十分大きい M についての $\pi_{N+q}(X(M))$ の p 成分の自明性から直ちにわかるように，M が十分大きいならば，準同型 $\pi_{N+q}(X(M))\to\pi_{N+q}(\Sigma^N X)$ は p 成分上で明らかに自明である．

補題の証明を終えるために残ったのは，Adams のフィルター付けの次の部分

$$\cdots\to X(s+1)\to X(s)$$

はそれ自身，空間 $X(s)$ の Adams のフィルター付けであることに注意することである．　　（証明終）

注意 1　任意の m, s, t に対して，群 $\pi_m(X(s), X(t))$ の位数は p の巾である．

注意 2　任意の m と任意の素数 $p'\neq p$ に対して群 $\pi_m(X(s))$ の p' 成分は s に無関係であり，包含 $X(s+r)\subset X(s)$ により誘導された準同型により互いに同型に写される．

この 2 つの注意は，3 対 $(X(s-1), X(s), X(t))$ とファイバー空間

$$X(s)\xrightarrow{Y_s}X(s-1)$$

の完全系列および空間 Y_s のホモトピー群は p 群であるという事実から出る．



補題と上の注意から Adams の定理の命題 (3) と (4) を導き出そう．定義により

$$B^{s,t}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s))\to\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X)],$$

$$B^{s+1,t+1}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s+1))\to\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X)]$$

$$=\mathrm{Ker}\,[\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X)\to\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))]$$

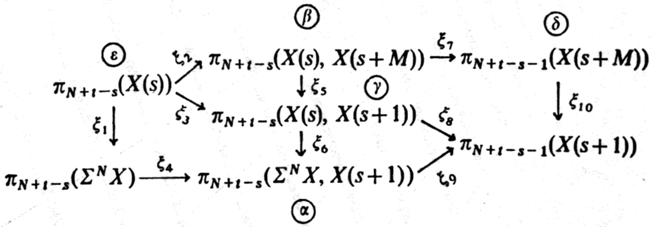
であり，したがって

$$B^{s,t}/B^{s+1,t+1}\cong\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s))\to\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))]$$

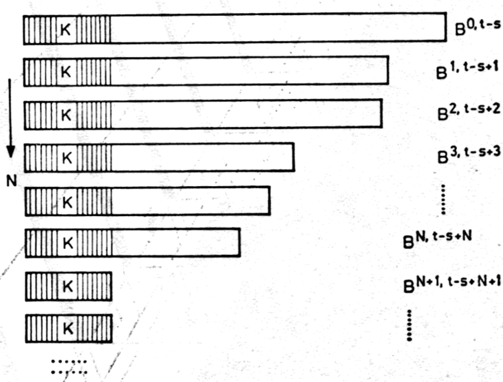
である．さらに，

$$E_M^{s,t}=\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+M))\to\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))]$$

である．次の図



を考える．これは可換であり，3 つの横の系列は完全である．$\alpha\in E_M^{s,t}$，すなわち，$\alpha\in\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))$，かつ $\alpha=\xi_6\xi_5(\beta)$，ただし，$\beta\in\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+M))$ とする．$\gamma=\xi_5(\beta)\in\pi_{N+t-s}(X(s), X(s+1))$ かつ $\delta=\xi_7(\beta)\in$



$\pi_{N+t-s-1}(X(s+M))$ とおく．注意1により，このとき，β は位数 p^h であり δ もそうである．したがって，$\xi_{10}(\delta)=0$ かつ $\xi_8(\gamma)=0$，すなわち $\gamma=\xi_3(\varepsilon)$，ただし $\varepsilon\in\pi_{N+t-s}(X(s))$ である．このとき，$\alpha=\xi_6\xi_3(\varepsilon)$，すなわち，$\alpha\in B^{s,t}/B^{s+1,t+1}$ である．これで $E_M^{s,t}\subset B^{s,t}/B^{s+1,t+1}$ を示した．逆に，各 M に対して明らかに包含 $B^{s,t}/B^{s+1,t+1}\subset E_M^{s,t}$ があり，したがって，$B^{s,t}/B^{s+1,t+1}=\bigcap_M E_M^{s,t}=E_\infty^{s,t}$ であり，これは命題 (3) を証明する．

命題 (4) は，注意2と基本的補題の直接の結果である．

Adams スペクトル系列のさらにいくつかの性質

一般の場合に，Adams の定理の命題 (3) と (4) の証明に進む前に，写像が誘導するこのスペクトル系列の間の準同型の性質を調べよう．

写像 $f:X\to X'$ が与えられ，空間 X と X' に対して Adams スペクトル系列を構成したと仮定する．f は $\mathscr{A}$-加群の間の準同型 $f^*:\tilde{H}^*(X')\to\tilde{H}^*(X)$ を誘導する．最後の代数的補題を証明する過程で用いたものと同様な構成は射影分解の準同型

$$\begin{array}{ccccccc}
H^*(X) & \longleftarrow & B_1 & \longleftarrow & B_2 & \longleftarrow & \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\tilde{H}^*(X') & \longleftarrow & B_1' & \longleftarrow & B_2' & \longleftarrow & \cdots
\end{array}$$

を与え，これは次のフィルター付けの写像

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma^N X & \longleftarrow & X(1) & \longleftarrow & X(2) & \longleftarrow & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Sigma^N X' & \longleftarrow & X'(1) & \longleftarrow & X'(2) & \longleftarrow & \cdots
\end{array}$$

を誘導する．（この構成は，Adams のフィルター付けが Serre のフィルター付けに写されるときのものと同様である．）今度は，これが Adams スペクトル系列の構成において考えた相対ホモトピー群の準同型を誘導し，これらの準同型の族が，Adams スペクトル系列の間の準同型を誘導する．

定理　写像 $f:X\to X'$ は X の Adams スペクトル系列 $\{E_r^{s,t}, d_r^{s,t}\}$ から X' の Adams スペクトル系列 $\{'E_r^{s,t}, 'd_r^{s,t}\}$ への準同型，すなわち，次の条件を満たす準同型 $f_r^{s,t}:E_r^{s,t}\to{}'E_r^{s,t}$ の族を誘導する：

(i) 準同型 $f_r^{*,*}$ は微分と可換，すなわち，次の図式は可換である：

$$\begin{array}{ccc} E_r^{s,t} & \xrightarrow{f_r^{s,t}} & {}'E_r^{s,t} \\ {\scriptstyle d_r^{s,t}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 'd_r^{s,t}} \\ E_r^{s+r,t+r-1} & \xrightarrow[f_r^{s+r,t+r-1}]{} & {}'E_r^{s+r,t+r-1} \end{array}$$

(ii) 準同型 $f_{r+1}: E_{r+1} \to {}'E_{r+1}$ は $f_r: E_r \to {}'E_r$ により誘導される複体 (E_r, d_r) と $({}'E_r, {}'d_r)$ のホモロジーの間の準同型である．

(iii) 準同型 $f_2^{s,t}: E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(\tilde{H}^*(X), \boldsymbol{Z}_p) \to {}'E_2^{s,t} = \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(\tilde{H}^*(X'), \boldsymbol{Z}_p)$ は $f^*: \tilde{H}^*(X') \to \tilde{H}^*(X)$ により誘導されるものである．

(iv) 極限の準同型 $f_\infty^{s,t}: E_\infty^{s,t} \to {}'E_\infty^{s,t}$ は $f_*: \pi_*^S(X) \to \pi_*^S(X')$ により誘導されるものである．

(iii) の説明．関手 Ext は第 1 変数について反変，第 2 変数について共変であることがホモロジー代数学より知られている．$M_2 \to M_1$ により誘導される準同型 $\mathrm{Ext}_A^{**}(M_1, N) \to \mathrm{Ext}_A^{**}(M_2, N)$ は次のように構成される：M_2 と M_1 の射影分解の間の準同型を選ぶと Hom の段階では逆向きの準同型を与えるが，これは再び，これらの複体のホモロジーの間の準同型を誘導する．

この定理は明らかであるから証明はしない．最後の命題は自明なように見えるかもしれないが，Adams の定理でまだ証明されていない命題を基礎にしているから，それを証明したものと考えることはできないことに注意する．もちろん，この未証明の命題の証明においてこの定理を使いはしない．必要なものは，ある空間が他の空間に写されたときの Adams のフィルター付けの間の写像の存在だけである．

重要な系　Adams スペクトル系列の第 2 項以降は空間の安定ホモトピー型のみに依存する．

言いかえれば，X と X' が**安定ホモトピー同値**（$\Longleftrightarrow$ X と X' の多重懸垂が普通の意味でホモトピー同値）ならば，各 $r \geq 2$ および s と t について，微分と可換な同型 $E_r^{s,t} \cong {}'E_r^{s,t}$ が存在して，同型な群 $\pi_{t-s}^S(X)$ と $\pi_{t-s}^S(X')$ は同一のフィルター付けをもち，かつ E_∞ 項はそれぞれのホモトピー群に同様に同伴している．

一般の場合の Adams の定理の証明の完成

有限な安定ホモトピー群の場合にはうまく適用した基本的補題も一般の場合には役に立たない．（上に与えられた補題の証明は，一般の場合にはうまくいかない.）「十分大きい M について，準同型 $\pi_{N+q}(X(s+M))\to\pi_{N+q}(X(s))$ は p 成分と自由直和因子上で自明である」という補題がほしいのであるが，残念ながら，これは明らかに正しくない．（もし，$\pi_{N+q}(X(s))$ が自由直和因子として $\boldsymbol{Z}$ を含むならば $\pi_{N+q}(X(s+M))$ も含む．一方，$X(s)$ と $X(s+M)$ のホモトピー群の間の差は，有限 p 群である $Y_{s+1}, Y_{s+2}, \cdots, Y_{s+M}$ のホモトピー群により評価されるから，$\pi_{N+q}(X(s+M))\to\pi_{N+q}(X(s))$ の核は有限である.）

基本的補題の役割は次の補題により果たされる．

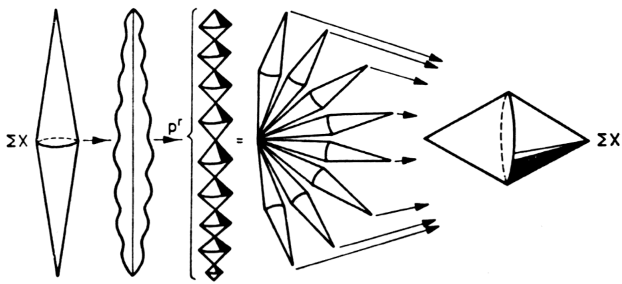
一般化された基本的補題　$\alpha\in\pi_{N+q}(X(s))$ は位数 ∞ または p^k をもつとする．このとき，十分大きい M について，α は準同型 $\pi_{N+q}(X(s+M))\to\pi_{N+q}(X(s))$ の像には属さない．

$\pi_{N+q}(X(s))$ の p 成分は有限なので，これは特に，十分大きい M について，準同型 $\pi_{N+q}(X(s+M))\to\pi_{N+q}(X(s))$ の p 成分上の自明性を意味する．

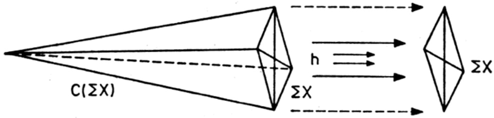
証明　一般性を失うことなく，$s=0$，すなわち，$X(s)=\Sigma^N X$ と仮定してよい．$\cdots\to X(s+1)\to X(s)$ は $X(s)$ の Adams フィルター付けであることを思いおこす．仮定により，元 α は p により無限に割り切れることはない．すなわち，自然数 r が存在して任意の $\alpha'\in\pi_{N+q}(\Sigma^N X)$ について $\alpha\neq p^r\alpha'$ である．

写像 $h:\Sigma X\to\Sigma X$ は次のように定義する．よく知られた写像（双対積）$\Sigma X\to\Sigma X\vee\Sigma X$ を繰り返し合成して，写像

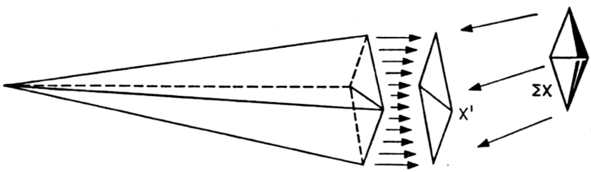
$$\Sigma X\to\Sigma X\vee\Sigma X\vee\cdots\vee\Sigma X \quad (p^r\ 個)$$



を得る．この1点和は，その成分を同時に折りたたんで ΣX に写すことができる．その結果，写像 $\Sigma X \to \Sigma X$ を得るが，これは次のように説明してもよい．よく知られているように，$\Sigma X = X \wedge S^1$ である．これから考える写像は，恒等写像 $X \to X$ と写像度 p^r の写像 $f : S^1 \to S^1$ により誘導された $1_X \wedge f : X \wedge S^1 \to X \wedge S^1$ である．この写像に沿って，ΣX に ΣX 上の錐を接着した空間を $X' =$



$\Sigma X \bigcup_{1 \wedge f} C\Sigma X$ とする．次に，写像 $\Sigma X \to X'$ を自然な方法で定義する：



この写像は，（上の注意により）これらの空間の $(N-1)$ 重懸垂の間の写像およびそれらの Adams フィルター付けの写像を誘導し，次の可換図式が得られる：

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma^N X & \longleftarrow & X(1) & \longleftarrow & X(2) & \longleftarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \Sigma^{N-1} X' & \longleftarrow & X'(1) & \longleftarrow & X'(2) & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

さて，一般化された基本的補題は古い基本的補題と次の命題から出る．

(a) X' の安定ホモトピー群は有限である．

(b) $\alpha \notin \mathrm{Ker}\,[\pi_{N+q}(\Sigma^N X) \to \pi_{N+q}(\Sigma^{N-1} X')]$

［(a) の証明］ 対 $(\Sigma^{N-1}X', \Sigma^N X)$ の完全系列

$$\pi_{N+r+1}(\Sigma^{N-1}X', \Sigma^N X) \xrightarrow{\partial} \pi_{N+r}(\Sigma^N X) \longrightarrow \pi_{N+r}(\Sigma^{N-1}X')$$
$$\longrightarrow \pi_{N+r}(\Sigma^{N-1}X', \Sigma^N X) \xrightarrow{\partial} \pi_{N+r-1}(\Sigma^N X)$$

を調べる．さて，安定次元において次を得る：

$$\pi_{N+r+1}(\Sigma^{N-1}X', \Sigma^N X) \cong \pi_{N+r+1}(\Sigma^{N-1}X'/\Sigma^N X) \cong \pi_{N+r+1}(\Sigma^{N+1}X)$$
$$\cong \pi_{N+r}(\Sigma^N X).$$

さらに，準同型$\partial:\pi_{N+r+1}(\Sigma^{N-1}X',\Sigma^N X)\cong\pi_{N+r}(\Sigma^N X)\to\pi_{N+r}(\Sigma^N X)$ は p^r を掛けることである．したがって，この準同型の核と余核は群 $\pi_{N+r}(\Sigma^{N-1}X')$ と同じく有限である．

［(b) の証明］ 同じ完全系列上で容易にわかるように，$\pi_{N+q}(\Sigma^N X)\to\pi_{N+q}(\Sigma^{N-1}X')$ の核は p^r で割り切れる元から成り，したがって，α はこれには属さない．

(b) により $\pi_{N+q}(\Sigma^{N-1}X')$ における位数 p^s の零でない元である α の像に対して，(a) により古い基本的補題を適用できて，M が十分大きいならば，群 $\pi_{N+q}(X'(M))$ の像に属さないことがわかる．このとき，α は $\pi_{N+q}(X(M))$ の像にも属さず，これで一般化された基本的補題の証明が終わる．

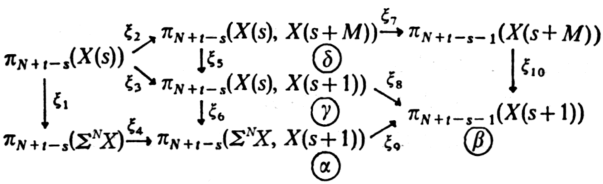
命題 (3) と (4) の証明　以前と同様に，同型

$$B^{s,t}/B^{s+1,t+1}\cong\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s))\to\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))]$$

があり，これと

$$E_\infty^{s,t}\cong\bigcap_M\mathrm{Im}\,[\pi_{N+t-s}(X(s+M))\to\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))]$$

との同型を証明する．明らかに，$B^{s,t}/B^{s+1,t+1}\subset E_\infty^{s,t}$ である．逆の包含を示すために，われわれがよく知っている次の図を再び考えよう：



この図は可換であり，横の系列は完全である．$\alpha\in\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))$ は準同型 $\xi_6\xi_3:\pi_{N+t-s}(X(s))\to\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))$ の像に属していないと仮定する．十分大きい M に対して，これは $\xi_6\xi_5$ の像にも属していないことを証明しなければならない．元 $\beta=\xi_9(\alpha)\in\pi_{N+t-s-1}(X(s+1))$ は（α を含めて $\pi_{N+t-s}(\Sigma^N X, X(s+1))$ のすべての元がもつように）p の巾に等しい位数をもつ．したがって $\beta=0$ かまたは M が大きいとき β は ξ_{10} の像に属さない．$\beta=0$ かつ $\alpha=\xi_6\xi_5(\delta)$ ならば $\alpha=\xi_6(\gamma)$，ただし $\gamma=\xi_5(\delta)\in\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+1))$，である．さて，$\xi_8(\gamma)=\xi_9(\alpha)=\beta=0$，したがって $\gamma=\xi_3(\varepsilon)$，ただし $\varepsilon\in\pi_{N+t-s}(X(s))$，であり，$\alpha=\xi_6\xi_3(\varepsilon)$ は仮定に反する．$\beta\neq0$ ならば M が十分大

きいとき $\beta \notin \mathrm{Im}\,\xi_{10}$ である．さて，$\alpha=\xi_6\xi_5(\delta)$，ただし $\delta\in\pi_{N+t-s}(X(s),X(s+M))$，は仮定に反して $\beta=\xi_{10}\xi_7(\delta)$ を意味する．命題 (3) は証明された．

命題 (4) は一般化された基本的補題から直ちに出る．（証明終）

これで Adams の定理の証明は完全に終わったことになる．

§33. 乗法構造

Leray スペクトル系列の乗法構造は，コホモロジーの積から生ずる．これは問題のすべての群がコホモロジー群かまたはコホモロジー群の部分群であるので完全に自然な事実である．さて，Adams スペクトル系列の場合はホモトピー群とその部分群を扱わなければならないが，（Whitehead 積はあるものの，これは非安定ホモトピー群で定義できるだけであるから）これらは何ら役に立つ乗法構造を持っていない．したがって，このスペクトル系列においては，Leray の場合の有用性に似ているような少なくとも何らかの積を定義することはできない．しかしながら，ある仮定の下（X が球面である唯1つの，しかし，重要な例において）では，Adams スペクトル系列を環のスペクトル系列に変える乗法構造のようなものを構成できる．

この特別な場合から始めよう．スペクトル系列の項に約束した環構造がすでにあると仮定する．このとき $\oplus_q\pi_q^S(S^0)$ も環であり，確かにこの環における積はわれわれが求めたい何かに同伴している．

最初に，この直和は自然な環構造をもっていることを示そう．

球面の安定ホモトピー群における合成積

$\alpha\in\pi_{N+k}(S^N)$, $\beta\in\pi_{N+l}(S^N)$, $k,l\ll N$，とする．このとき β は $\pi_{N+k+l}(S^{N+k})$ の元とみなしてよい．写像 $\bar\beta:S^{N+k+l}\to S^{N+k}$ と $\bar\alpha:S^{N+k}\to S^N$ はそれぞれ β と α を表わすとすると，合成 $\bar\alpha\circ\bar\beta:S^{N+k+l}\to S^N$ は $\pi_{N+k+l}(S^N)$ の元を表わす．この元を α と β の**合成**とよび，$\alpha\circ\beta$ と表わす．

積のもう1つの定義は次の通りである．α,β と $\bar\alpha$ は上の通りであり，β を表わす写像を $\bar\beta:S^{N+l}\to S^N$ とする．$(-1)^{Nk}\overline{\alpha\circ\beta}=\bar\alpha\wedge\bar\beta:S^{N+k}\wedge S^{N+l}\to S^N\wedge S^N$（すなわち，最初の球面は $\bar\alpha$ で，2番目の球面は $\bar\beta$ で写される）とおくと写像 $S^{N+N+k+l}\to S^{N+N}$ あるいは（$k+l\ll N$ なので）$S^{N+k+l}\to S^N$ を得るので，これに

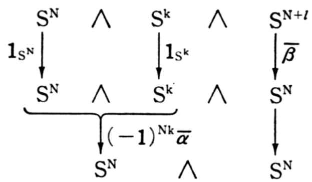
より，$\alpha\circ\beta$を定義する．

命題　この2つの定義は同値である．

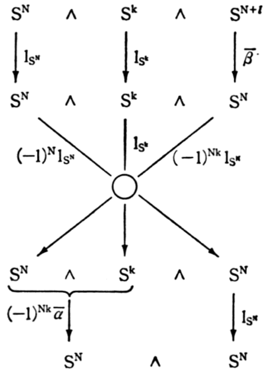
証明　実際，写像

$$(-1)^{Nk}(\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta})=((-1)^{Nk}\bar{\alpha})\wedge\bar{\beta}: S^{N+k}\wedge S^{N+l}\to S^N\wedge S^N$$

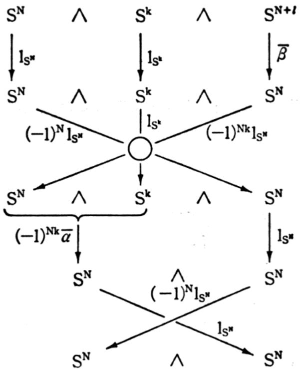
は次の2つの写像の合成である：



この図に外側の因子を交換する写像（これはNが偶数ならば向き付けを保ち，Nが奇数なら向き付けを反対にする）を付け加える．これが恒等写像にホモトープであることを保証するために，恒等写像よりもむしろ$(-1)^{Nk}1_{S^N}$を適用して第3の因子を写すことにする．



最後に，最後の積で乗法の順序を変える（上のように符号も修正して）写像を付け加えて図を完成する：



これで第1因子上で恒等写像，第2因子上で合成

$$S^{N+k+l} \xrightarrow{\bar{\beta}} S^{N+k} \xrightarrow[\text{(因子の交換)}]{(-1)^{Nk} 1_{S^{N+k}}} S^{N+k} \xrightarrow{(-1)^{Nk}\bar{\alpha}} S^N$$

すなわち，$\bar{\alpha}\circ\bar{\beta}$ と一致する写像 $S^N \wedge S^{N+k+l} \to S^N \wedge S^N$ を得たことになり，命題は証明された．（証明終）

命題　合成積は反可換，すなわち，$\alpha\circ\beta=(-1)^{kl}\beta\circ\alpha$ である．

証明　明らかに，元 $\alpha\circ\beta$ は定義の自然数 N に依存しない．したがって，N は偶数と仮定してよい．このとき $\overline{\alpha\circ\beta}=\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta}$ かつ $\overline{\beta\circ\alpha}=\bar{\beta}\wedge\bar{\alpha}$ であり，さらに，写像 $\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta}$ と $\bar{\beta}\wedge\bar{\alpha}$ により定義される $\pi_{2N+k+l}(S^{2N})$ の元は乗数 $(-1)^{kl}$ だけ異なる．実際，$\bar{\alpha}\wedge\bar{\beta}$ は合成写像

$$S^{N+k}\wedge S^{N+l} \to S^{N+l}\wedge S^{N+k} \to S^N\wedge S^N \to S^N\wedge S^N$$

である．ただし，外側の写像はいずれも因子を交換している．この最初の写像は整数 $(-1)^{(N+k)(N+l)}$ の符号に依存して，向き付けを変えるか，または保つかである．第3の写像は（N が偶数なので）恒等写像にホモトープであるから，無視してよい．よく知られているように，定義域の球面の向き付けを逆にすることにより，（ホモトピー群に割算が定義されているので）球写像のホモトピー類の符号を逆にする．したがって，$\alpha\circ\beta$ と $\beta\circ\alpha$ の符号は，既述したように $(-1)^{(N+k)(N+l)}=(-1)^{kl}$ だけ異なる．（証明終）

注意　もし，$\varphi: S^q \to S^r$ が任意の写像，$\psi_1: S^q \to S^q$ と $\psi_2: S^r \to S^r$ がそれぞれ写像度 $\varepsilon_1=\pm 1, \varepsilon_2=\pm 1$ の写像ならば，球写像

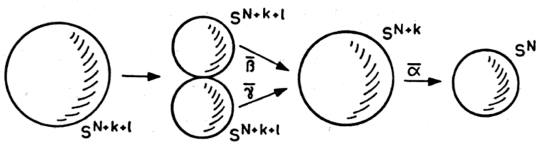
$$S^q \xrightarrow{\phi_1} S^q \xrightarrow{\varphi} S^r \xrightarrow{\phi_2} S^r$$

は $\varphi: S^q \to S^r$ のホモトピー類に $\varepsilon_1\varepsilon_2$ を掛けたものを表わす，という簡単な事実を何故利用しなかったのかと読者は不思議に思っているかもしれない.（そうすれば，最後の２つの命題の証明における難しさも割愛できたかもしれない.）しかし，残念ながら，この事実は好都合すぎて正しくない.（例えば，もし $\chi: S^3 \to S^2$ が Hopf 写像，$\phi: S^2 \to S^2$ が写像度 -1 の写像ならば，合成 $S^3 \xrightarrow{\chi} S^2 \xrightarrow{\phi} S^2$ は，$-\chi$ ではなくて，χ にホモトープである.）もし，球写像 φ が安定次元にあれば，この命題は主張通り正しく，最後の命題から出る.

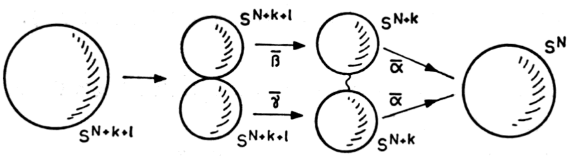
命題　乗法は両側から分配的である：

$$(\beta+\gamma)\circ\alpha=\beta\circ\alpha+\gamma\circ\alpha, \quad \alpha\circ(\beta+\gamma)=\alpha\circ\beta+\alpha\circ\gamma$$

証明　反可換性の法則はすでに使えるから，公式の一方，すなわち，第２の式を証明すれば十分である．左辺の写像



と右辺の写像



を考える．２つの写像が実は一致することはまったく明らかであり，したがって，乗法の分配法則は証明された.　（証明終）

注意　同様に公式 $(\beta+\gamma)\circ\alpha=\beta\circ\alpha+\gamma\circ\alpha$ を直接証明しようとしても，非安定次元でこの等式が成り立たない(し，安定次元ではうまくいく幾何学的構成も明らかに難しい)ので，まずは成功しないであろう．左分配法則の非安定次元における反例として，$\chi: S^3 \to S^2$ と $2\cdot 1_{S^2}=1_{S^2}+1_{S^2}: S^2 \to S^2$ の合成は，$2\chi=1_{S^2}\circ\chi+1_{S^2}\circ\chi$ ではなくて，4χ に等しいということを述べておく.

乗法の結合法則は明らかである．したがって，$\pi_*^S(S^0)=\oplus_q\pi_q^S(S^0)$ は反可換，結合的，次数付き環であることを示したことになる．

代数的な余談

体 k 上の単位元をもつ次数付き多元環 A は，次の条件を満たすとき **Hopf 多元環**とよばれる：

(1) 負整数 k について $A^k=0$ かつ $A^0=k$,

(2) 多元環の準同型である「対角写像」または「双対積」$\Delta: A\to A\otimes A$ がある．($A\otimes A$ における積は $(\alpha'\otimes\beta')(\alpha''\otimes\beta'')=(-1)^{\deg\beta'\deg\alpha''}\alpha'\alpha''\otimes\beta'\beta''$ であることを思いおこす.) さらに，$\alpha\in A$ に対して $\Delta(\alpha)=\rho(\alpha)\otimes 1+1\otimes\sigma(\alpha)+\cdots$，ただし，$\rho$ は恒等写像，σ は $(-1)^{\dim\alpha}$ を掛ける写像で，いずれも多元環 A の自己同型であり，項「…」は正の次数の元のテンソル積である．

Hopf 多元環の 1 つの例は，$\Delta(\beta)=\beta\otimes 1-1\otimes\beta$, $\Delta(\mathscr{P}_p^i)=\sum_{k+l=i}\mathscr{P}_p^k\otimes\mathscr{P}_p^l$ ($p=2$ については，$\Delta(Sq^i)=\sum_{k+l=i}Sq^k\otimes Sq^l$) で定義された対角写像をもつ Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ であり，もう1つの重要な例は H-空間の体係数のコホモロジー環である．

A が Hopf 多元環であり，B と C が A-加群ならば，k 上のベクトル空間と考えたそれらのテンソル積 $B\otimes C$ も A-加群である．(明らかに，この積は $A\otimes A$-加群であるが，準同型 $\Delta: A\to A\otimes A$ により，これは A-加群とも考えられる.)

B と C が自由な A-加群ならば，$B\otimes C$ も自由な A-加群である．証明は読者に任せる．

1つの重要な注意　$\mathscr{A}$ が Steenrod 代数ならば，上の構成は Künneth 公式：

任意の空間の対 X, Y に対して

$$\tilde{H}^*(X\wedge Y;\boldsymbol{Z}_p)\cong\tilde{H}^*(X;\boldsymbol{Z}_p)\otimes\tilde{H}^*(Y;\boldsymbol{Z}_p)$$

と両立する．したがって，$\tilde{H}^*(X\wedge Y;\boldsymbol{Z}_p)$ は 2 つの理由——第 1 に空間のコホモロジーである，第 2 に $\mathscr{A}$ が Hopf 多元環である——により $\mathscr{A}$-加群である．Cartan の定理は 2 つの構造が一致することを示している．

次に，$p=2$ のときの Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ の場合を考察する．($p>2$ の場合は，唯 1 つの差はある場所に乗数 $(-1)^*$ が現われるという注意をして，読者に任せる.)

任意の A-加群 M', M'', N', N'' に対して，積



$$\mathrm{Ext}_A^{s',t'}(M',N')\otimes\mathrm{Ext}_A^{s'',t''}(M'',N'')\to$$
$$\to\mathrm{Ext}_A^{s'+s'',t'+t''}(M'\otimes M'',N'\otimes N'')$$

が次のように定義される．M' と M'' に対して次の自由分解

$$M'\xleftarrow{\partial_1'}B_1'\xleftarrow{\partial_2'}B_2'\xleftarrow{\partial_3'}\cdots$$
$$M''\xleftarrow{\partial_1''}B_1''\xleftarrow{\partial_2''}B_2''\xleftarrow{\partial_3''}\cdots$$

を考える．このとき，A-加群 $M'\otimes M''$ の次の自由分解

$$M'\otimes M''\xleftarrow{\partial_1}B_1'\otimes B_1''\xleftarrow{\partial_2}B_2'\otimes B_1''+B_1'\otimes B_2''$$
$$\xleftarrow{\partial_3}B_3'\otimes B_1''+B_2'\otimes B_2''+B_1'\otimes B_3''\xleftarrow{\partial_4}\cdots$$

がある．ただし，（テンソル積は $\boldsymbol{Z}_2$ 上であり）∂_i は次の等式

$$\partial_{p+q-1}(\alpha'\otimes\alpha'')=\partial_p'\alpha'\otimes\alpha''+(-1)^p\alpha'\otimes\partial_q''\alpha'',\ \alpha'\in B_p',\ \alpha''\in B_q''$$

で定義する．自然な準同型

$$\mathrm{Hom}_A(B_p',N')\otimes\mathrm{Hom}_A(B_q'',N'')\to\mathrm{Hom}_A(B_p'\otimes B_q'',N'\otimes N'')$$

があり，これはホモロジーに移行して，Ext における求める準同型を与える．もし，$M'\cong M''\cong N'\cong N''\cong M'\otimes M''\cong N'\otimes N''\cong\boldsymbol{Z}_2$ ならば，この操作は $\bigoplus_{s,t}\mathrm{Ext}_A^{s,t}(\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{Z}_2)$ 上に環構造を定義する．

定義　群 $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{Z}_2)$ は多元環 A の**ホモロジー群**とよばれ，$H^{s,t}(A)$ と表わされる．

したがって，Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ のホモロジー環を定義したことになる．

演習　これが結合的かつ可換であることを証明せよ．

上の構成で $M''\neq\boldsymbol{Z}_2$ ならば，次の準同型を得る：

$$\mathrm{Ext}_A^{s',t'}(\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{Z}_2)\otimes\mathrm{Ext}_A^{s'',t''}(M'',\boldsymbol{Z}_2)\to\mathrm{Ext}_A^{s'+s'',t'+t''}(M'',\boldsymbol{Z}_2)$$

要するに，任意の A-加群 M に対して $\mathrm{Ext}_A^{*,*}(M,\boldsymbol{Z}_2)$ は $H^{**}(A)$-加群である．もし，$M\to N$ が任意の A-加群準同型ならば，誘導された写像 $\mathrm{Ext}_A^{**}(N,\boldsymbol{Z}_2)\to\mathrm{Ext}_A^{**}(M,\boldsymbol{Z}_2)$ は $H^{**}(A)$-準同型である．

定理（Adams）　$X=S^0$ ならば，Adams スペクトル系列は次の条件を満たす積 $E_r^{s,t}\otimes E_r^{s',t'}\to E_r^{s+s',t+t'}$ をもつ：

(i)　この積は可換かつ結合的，

(ii)　この積は次の Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ のホモロジーにおける積と一致する：

$$H^{s,t}(\mathscr{A})\otimes H^{s',t'}(\mathscr{A})\to H^{s+s',t+t'}(\mathscr{A}),$$

(iii) $d_r(uv)=(d_ru)v+u(d_rv)$,

(iv) この積は，同型 $E_{r+1}^{s,t}\cong H(E_r^{s,t} : d_r^{s,t})$ および ($s<r<k\leqq\infty$ に対して) 単射準同型 $E_k^{s,t}\to E_r^{s,t}$ と可換である，

(v) E_∞ における積は次の合成積に同伴している：

$$\pi_k^S(S^0)\otimes\pi_l^S(S^0)\to\pi_{k+l}^S(S^0)$$

証明　実は，この定理より若干一般な命題を証明したいので，2つの空間 X' と X'' から始める．まず

$$\tilde{H}^*(X' ; \boldsymbol{Z}_2)\leftarrow B_1'\leftarrow B_2'\leftarrow\cdots$$

と

$$\tilde{H}^*(X'' ; \boldsymbol{Z}_2)\leftarrow B_1''\leftarrow B_2''\leftarrow\cdots$$

はそれぞれ $\mathscr{A}$-加群 $\tilde{H}^*(X' ; \boldsymbol{Z}_2)$ と $\tilde{H}^*(X'' ; \boldsymbol{Z}_2)$ の自由 $\mathscr{A}$-分解とし，

$$\Sigma^{N'}X'\leftarrow X'(1)\leftarrow X'(2)\leftarrow\cdots$$

と

$$\Sigma^{N''}X''\leftarrow X''(1)\leftarrow X''(2)\leftarrow\cdots$$

は対応する Adams フィルター付けとする．空間 $\Sigma^{N'}X'\wedge\Sigma^{N''}X''=\Sigma^{N'+N''}(X'\wedge X'')$ において $X(n)=\bigcup_{i+j=n}X'(i)\wedge X''(j)$ とおき，フィルター付けを定義する．ただし $X'(0)=\Sigma^{N'}X'$ かつ $X''(0)=\Sigma^{N''}X''$ である．

ここで Y_i' と Y_j'' は Adams のフィルター付け $\{X'(i)\}$ と $\{X''(j)\}$ を構成するのに適用される Eilenberg-MacLane 空間の積を表わし，$Y_n=X(n)/X(n+1)$ とすると，明らかに

$$Y_n=X(n)/X(n+1)=\bigvee_{i+j=n}(X'(i)/X'(i+1))\wedge(X''(j)/X''(j+1))$$

である．一方，空間 $X'(i)/X'(i+1)$ と $X''(j)/X''(j+1)$ は安定次元においてそれぞれ Y_i' と Y_j'' に同値である．したがって

$$Y_n=\bigvee_{i+j=n}Y_i'\wedge Y_j''$$

かつ

$$\tilde{H}^*(Y_n)\cong\oplus_{i+j=n}\tilde{H}^*(Y_i')\otimes\tilde{H}^*(Y_j'')$$

である．明らかに，フィルター付け

$$\Sigma^{N'+N''}(X'\wedge X'')\leftarrow X(1)\leftarrow X(2)\leftarrow\cdots$$

は次の分解の Adams フィルター付けである：

$$\tilde{H}^*(X'\wedge X'' ; \boldsymbol{Z}_2)\leftarrow B_1'\otimes B_1''\leftarrow B_2'\otimes B_1''+B_1'\otimes B_2''\leftarrow\cdots$$

上記の分解とフィルター付けを用いて，X', X'' および $X'\wedge X''$ に対する

Adams スペクトル系列を構成する．積

$$E_r^{s',t'}(X')\otimes E_r^{s'',t''}(X'')\to E_r^{s'+s'',t'+t''}(X'\wedge X'')$$

は，このとき次のように定義される．任意の元の対

$$\alpha'\in E_r^{s',t'}(X')=\mathrm{Im}\,[\pi_{N'+t'-s'}(X'(s'),X'(s'+r))\to\pi_{N'+t'-s'}(X'(s'+1-r),X'(s'+1))]$$

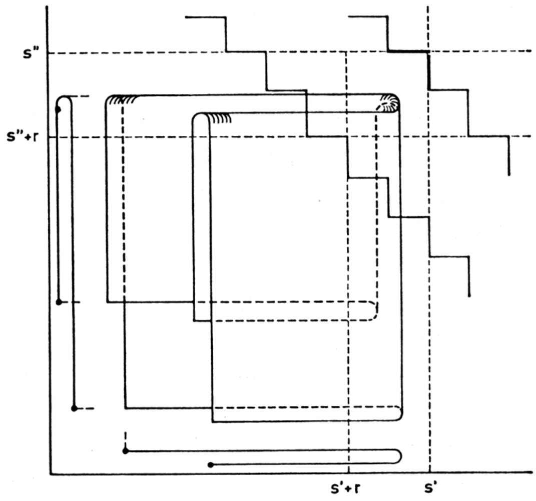
$$\alpha''\in E_r^{s'',t''}(X'')=\mathrm{Im}\,[\pi_{N''+t''-s''}(X''(s''),X''(s''+r))\to\pi_{N''+t''-s''}(X''(s''+1-r),X''(s''+1))]$$

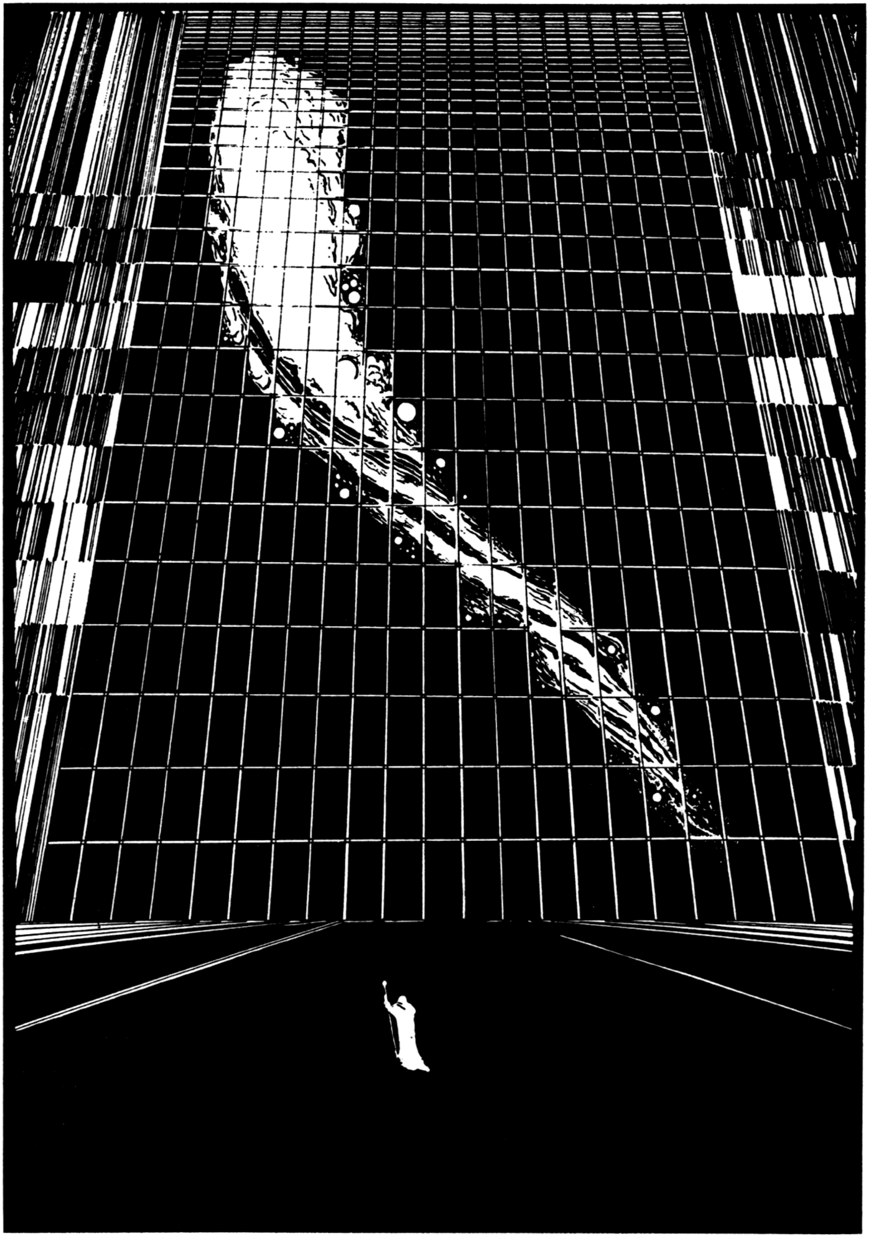
に対して，$\pi_{N'+t'-s'}(X'(s'),X'(s'+r))$ と $\pi_{N''+t''-s''}(X''(s''),X''(s''+r))$ において像がそれぞれ α' と α'' であるような対応する元をとる．すなわち，これらを表わすのは立方体 $I^{N'+t'-s'}$ と $I^{N''+t''-s''}$ からそれぞれ X' と X'' への写像であり，これらは立方体をそれぞれ $X'(s')$ と $X''(s'')$ に，境界を $X'(s'+r)$ と $X''(s''+r)$ に写す．これらの写像は次の写像を考えて自然に「掛けて」よい：

$$I^{N'+t'-s'}\times I^{N''+t''-s''}=I^{N'+N''+t'+t''-s'-s''}\to X'\times X''\to X'\wedge X''$$

この写像は立方体 $I^{N'+N''+t'+t''-s'-s''}$ を $X'(s')\wedge X''(s'')\subset X(s'+s'')$ に，その境界を

$$X'(s'+r)\wedge X''(s'')\cup X'(s')\wedge X''(s''+r)\subset X(s'+s''+r)$$





に写す．したがって，これは対 $(X(s'+s''), X(s'+s''+r))$ の相対球写像であり，したがって $\pi_{N'+N''+t'+t''-s'-s''}(X(s'+s''), X(s'+s''+r))$ の元を定義し(前ページの図を参照)，この元の $\pi_{N'+N''+t'+t''-s'-s''}(X(s'+s''+1-r), X(s'+s''+1))$ における像は，定義により $\alpha'\in E_r^{s',t'}(X')$ と $\alpha''\in E_r^{s'',t''}(X'')$ のまさに積である $E_r^{s'+s'',t'+t''}(X'\wedge X'')$ の元である．

このようにして得られた積は微分と可換であり，E_2 上で前に考えた積

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{**}(\tilde{H}^*(X'), \boldsymbol{Z}_2)\otimes\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{**}(\tilde{H}^*(X''), \boldsymbol{Z}_2)$$
$$\to\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{**}(\tilde{H}^*(X')\otimes\tilde{H}^*(X''), \boldsymbol{Z}_2)$$

と一致する．さらに，極限では，積 $E_\infty^{**}(X')\otimes E_\infty^{**}(X'')\to E_\infty^{**}(X'\wedge X'')$ を与え，これは容易にわかるように，積

$$\pi_k^S(X')\otimes\pi_l^S(X'')\to\pi_{k+l}^S(X'\wedge X'')$$

に同伴している．

$X'=X''=S^0$ の場合には，これらの結果は証明すべき定理を意味する．

（証明終）

さて，$X'=S^0$ とし，$X''=X$ は任意の空間とする．上の構成により $E_r^{**}(X)$ は $E_r^{**}(S^0)$-加群構造をもち，これは，$r=2$ のときは，$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{**}(\tilde{H}^*(X), \boldsymbol{Z}_2)$ の $H^{**}(\mathscr{A})$-加群構造と一致し，$r=\infty$ のときは，(任意の X に対して球面の安定ホモトピー群の元は，合成により安定ホモトピー群に作用する**安定ホモトピー作用素**——すなわち，作用素 $\alpha\in\pi_{N+k+l}(S^{N+k})$ は $\xi\in\pi_{N+k}(\Sigma^N X)$ に合成

$$S^{N+k+l}\xrightarrow{\bar{\alpha}}S^{N+k}\xrightarrow{\bar{\xi}}\Sigma^N X$$

が表わす元を対応させる——と自然に考えられるという意味で) $\pi_*^S(X)$ 上に存在する $\pi_*^S(S^0)$-加群構造に同伴である．

§34. Adams スペクトル系列の応用

球面の安定ホモトピー群の問題を調べよう．加法と乗法構造を込めて，E_2 項，すなわち Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ の mod 2 ホモロジーの計算から始める．

$\mathscr{A}$-加群 $\tilde{H}^*(S^0;\boldsymbol{Z}_2)\cong\boldsymbol{Z}_2$ の分解を詳しく記述しよう．明らかに $\mathscr{A}$ 自身は分解の最初の自由加群として選んでよい．全射準同型 $\mathscr{A}\to\boldsymbol{Z}_2$ は，単位元を $\boldsymbol{Z}_2$ の一意的な自明でない元に写し，他のすべての元を零に写す．この全射準同型の核は正の次数の元から成るイデアル $\tilde{\mathscr{A}}$ である．次の段階では $\mathscr{A}$-生成元系をこ

のイデアルにおいて選ぶ．この生成元系は極小であることを思いおこそう．これは，最小次数（今の場合，次数1）の成分から生成元を選び始めることを意味する．ベクトル空間 $\mathscr{A}_1$ は次元1であり，$a_1=Sq^1$ により生成される．次に $\mathscr{A}_2$ を考える．これも1次元である．$Sq^1a_1=0$ であるから，生成元 Sq^2 は a_1 により表わすことはできず，これは次の生成元として選ばなければならない．これを a_2 と表わす．すでに1つ関係式を見つけているので，$\tilde{\mathscr{A}}$ は $\mathscr{A}$-加群として自由ではないことに注意する．要するに，$\mathscr{A}$-加群 $\tilde{\mathscr{A}}$ においてすべての関係式を知ることは有用である．次数2では，$Sq^1a_1=0$ があるだけである．Serre の定理により，次数3では，Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ は前出の生成元で表わされる2つの加法生成元 Sq^3 と Sq^2Sq^1 をもつ（$Sq^3=Sq^1a_2, Sq^2Sq^1=Sq^2a_1$）．この次数には関係式は存在しない．次数4では2つの加法生成元 Sq^4 と Sq^3Sq^1 がある．ここで $Sq^3Sq^1=Sq^3a_1$ であるが，Sq^4 は Sq^1 と Sq^2 を用いて書くことはできないから，新しい生成元としてこれを導入する：$a_3=Sq^4$．この次数4では2つの関係式(もっと正確には，関係式の2次元空間)がなければならない．というのは，$\mathscr{A}$ の元を生成元 a_1 と a_2 に適用して，Sq^2a_2, Sq^3a_1 と $Sq^2Sq^1a_1$ が得られ，さらに，新しい生成元 a_3 がある．したがって，もし関係式がなければ $\mathscr{A}_4$ は4次元の筈であるが，その実際の次元は2であるから，関係式の2次元空間の基底として，Sq^2a_2 と $Sq^2Sq^1a_1$ を Sq^3a_1 により表わす関係式を選んでよい．ここで，Adem の関係式 $Sq^2a_2=Sq^3a_1$ および $Sq^2Sq^1a_1=0$ を思いおこそう．

Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ のホモロジー構造をさらに計算するのは，機械的に行なえる．コンピュータでこの計算を試みているといろいろ聞いているが，ここではコンピュータを使わずに次数12まで関係式を表にして，この過程を行なってみた．生成元と関係式の表は次ページの通りである．

実際，元 Sq^{2^s} は明らかに生成元系をなすので，計算せずに生成元として選ぶことができる．したがって，上の作業の意義は，関係式の列挙にすぎない．

自由 $\mathscr{A}$-加群 B_2 は $\tilde{\mathscr{A}}=\mathrm{Ker}\,(B_1\to\tilde{H}^*(S^0\,;\,\boldsymbol{Z}_2))$ と同じ個数の生成元をもつ，すなわち，次数 $1, 2, 4, 8, \cdots$ の生成元 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ により生成されている．準同型 $B_2\to B_1=\mathscr{A}$ は α_k を $Sq^{2^{k-1}}u$ に写す，ただし u は B_1 の生成元である．この全射準同型の核は $\mathscr{A}$-加群 $\tilde{\mathscr{A}}$ の生成元 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ の間の関係式の $\mathscr{A}$-加群に同型である．（$\tilde{\mathscr{A}}$ の加法生成元は表の第1列に示されている.）したがって，われわれが直面する次の問題は，この関係式の加群に極小生成元系を選ぶことである．

第　1　行

N	生　成　元	関　係　式
1	a_1	—
2	a_2	$Sq^1a_1=0$
3	$Sq^1a_2,\ Sq^2a_1$	—
4	$a_3,\ Sq^3a_1$	$Sq^2a_2=Sq^3a_1,\ Sq^2Sq^1a_1=0$
5	$Sq^1a_3,\ Sq^4a_1$	$Sq^3Sq^1a_1=0,\ Sq^3a_2=0,\ Sq^2Sq^1a_2=Sq^1a_3+Sq^4a_1$
6	$Sq^5a_1,\ Sq^4a_2,\ Sq^2a_3$	$Sq^4Sq^1a_1=0,\ Sq^5a_1=Sq^3Sq^1a_2$
7	$Sq^6a_1,\ Sq^5a_2,\ Sq^4Sq^2a_1,\ Sq^3a_3$	$Sq^5Sq^1a_1=0,\ Sq^6a_1=Sq^2Sq^1a_3,\ Sq^4Sq^1a_2=Sq^5a_2$
8	$a_4,\ Sq^7a_1,\ Sq^6a_2,\ Sq^5Sq^2a_1$	$Sq^6Sq^1a_1=0,\ Sq^4Sq^2Sq^1a_1=0,\ Sq^5Sq^2a_1=Sq^4Sq^2a_2,$ $Sq^7a_1=Sq^3Sq^1a_3,\ Sq^5Sq^1a_2=0,\ Sq^4a_3=Sq^7a_1+Sq^6a_2$
9	$Sq^1a_4,\ Sq^8a_1,\ Sq^7a_2,\ Sq^6Sq^1a_2,$ $Sq^6Sq^2a_1$	$Sq^7Sq^1a_1=0,\ Sq^5Sq^2Sq^1a_1=0,\ Sq^5Sq^2a_2=0,\ Sq^5a_3$ $=Sq^7a_2,\ Sq^4Sq^2Sq^1a_2+Sq^4Sq^1a_3+Sq^6Sq^2a_1=0,$ $Sq^4Sq^1a_3=Sq^1a_4+Sq^8a_1+Sq^7a_2$
10	$Sq^9a_1,\ Sq^8a_2,\ Sq^7Sq^1a_2,$ $Sq^7Sq^2a_1,\ Sq^6Sq^3a_1,\ Sq^4Sq^2a_3$	$Sq^8Sq^1a_1=0,\ Sq^6Sq^2Sq^1a_1=0,\ Sq^6Sq^2a_2=Sq^6Sq^3a_1,$ $Sq^5Sq^1a_3=Sq^9a_1,\ Sq^5Sq^2Sq^1a_2=Sq^7Sq^2a_1+Sq^9a_1,$ $Sq^6a_3=Sq^7Sq^1a_2,\ Sq^2a_4+Sq^4Sq^2a_3+Sq^8a_2+Sq^7Sq^2a_1=0$
11	$Sq^{10}a_1,\ Sq^9a_2,\ Sq^8Sq^1a_2,$ $Sq^8Sq^2a_1,\ Sq^7Sq^3a_1,\ Sq^3a_4$	$Sq^9Sq^1a_1=0,\ Sq^7Sq^2Sq^1a_1=0,\ Sq^6Sq^3Sq^1a_1=0,$ $Sq^6Sq^3a_2=0,\ Sq^7Sq^2a_2=Sq^7Sq^3a_1,\ Sq^6Sq^2Sq^1a_2+Sq^9a_2$ $+Sq^8Sq^1a_2+Sq^7Sq^3a_1=0,\ Sq^9a_2+Sq^8Sq^1a_2+Sq^6Sq^1a_3$ $=0,\ Sq^5Sq^2a_3=Sq^9a_2+Sq^3a_4,\ Sq^2Sq^1a_4=Sq^{10}a_1,$ $Sq^4Sq^2Sq^1a_3+Sq^{10}a_1+Sq^8Sq^2a_1=0,\ Sq^7a_3=0$
12	$Sq^{11}a_1,\ Sq^9Sq^2a_1,\ Sq^8Sq^3a_1,$ $Sq^{10}a_2,\ Sq^9Sq^1a_2,\ Sq^8a_3,\ Sq^4a_4$	$Sq^{10}Sq^1a_1=0,\ Sq^8Sq^2Sq^1a_1=0,\ Sq^7Sq^3Sq^1a_1=0,$ $Sq^7Sq^3a_2=0,\ Sq^8Sq^2a_2=Sq^8Sq^3a_1,\ Sq^7Sq^2Sq^1a_2$ $=Sq^9Sq^1a_2,\ Sq^6Sq^3Sq^1a_2=Sq^9Sq^2a_1+Sq^8Sq^3a_1,$ $Sq^7Sq^1a_3=Sq^9Sq^1a_2,\ Sq^6Sq^2a_3=Sq^{11}a_1+Sq^9Sq^2a_1$ $+Sq^{10}a_2+Sq^8Sq^3a_1+Sq^9Sq^1a_2,\ Sq^5Sq^2Sq^1a_3$ $+Sq^{11}a_1+Sq^9Sq^1a_2=0,\ Sq^3Sq^1a_4=Sq^{11}a_1$

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 & Sq^1 & 1 \\ a_2 & Sq^2 & 2 \\ a_3 & Sq^4 & 4 \\ a_4 & Sq^8 & 8 \end{array}\right\}\ \text{次　数}$$

この加群の最初の自明でない元は次数 2 をもつ関係式 $Sq^1a_1=0$ である．この関係式（あるいは，Ker $(B_1\to\tilde{H}^*(S^0\,;\,\boldsymbol{Z}_2))$ の元）を b_1 で表わす．次数 3 においては関係式はない．Sq^1b_1 は何に等しいか？　関係式 $Sq^1a_1=0$ に作用素 Sq^1 を適用すると，元 Sq^1Sq^1 は $\mathscr{A}$ において零に等しいので，恒等式 $0=0$ を得る．さて，関係式 $0=0$ は関係式の加群において零元であるから，したがって，

$Sq^1b_1=0$ である．さらに，次数 4 において，2 つの関係式がある．すなわち，その 1 つは Sq^2b_1 であるが，もう 1 つは b_1 により表わすことはできない．（第 1 に，Sq^2 は次数を 2 だけ増やす唯 1 つの作用素であり，第 2 に，この関係式は a_2 を含むので，a_2 を含まない b_1 から得ることはできない．）したがって，次数 4 においては Sq^2b_1 と新しい生成元 b_2 がある．次数 ≤ 12 で，この $\mathscr{A}$-加群は 6 個の生成元をもつ．

第 2 行

N	生成元	関係式
2	b_1	—
3	—	$Sq^1b_1=0$
4	b_2, Sq^2b_1	—
5	b_3, Sq^3b_1, Sq^1b_2	$Sq^2Sq^1b_1=0$
6	Sq^4b_1, Sq^1b_3	$Sq^2b_2=Sq^4b_1+Sq^1b_3$, $Sq^3Sq^1b_1=0$
7	Sq^5b_1, Sq^2b_3, $Sq^2Sq^1b_2$	$Sq^4Sq^1b_1=0$, $Sq^3b_2=Sq^5b_1$
8	b_4, Sq^6b_1, $Sq^4Sq^2b_1$, Sq^4b_2, $Sq^3Sq^1b_2$, Sq^3b_3	$Sq^5Sq^1b_1=0$, $Sq^2Sq^1b_3=Sq^3Sq^1b_2+Sq^6b_1$
9	b_5, Sq^7b_1, $Sq^5Sq^2b_1$, Sq^5b_2, Sq^4b_3, Sq^1b_4	$Sq^6Sq^1b_1=0$, $Sq^4Sq^2Sq^1b_1=0$, $Sq^5b_2=Sq^4Sq^1b_2$, $Sq^7b_1=Sq^3Sq^1b_3$
10	b_6, Sq^8b_1, $Sq^6Sq^2b_1$, Sq^6b_2, Sq^5b_3, Sq^2b_4, $Sq^4Sq^2b_2$	$Sq^7Sq^1b_1=0$, $Sq^5Sq^2b_1=0$, $Sq^5Sq^1b_2=0$, $Sq^1b_5=Sq^5b_3+Sq^8b_1+Sq^4Sq^1b_3$, $Sq^4Sq^1b_3+Sq^4Sq^2b_2+Sq^6Sq^2b_1=0$
11	Sq^9b_1, $Sq^7Sq^2b_1$, $Sq^6Sq^3b_1$, Sq^7b_2, $Sq^6Sq^1b_2$, $Sq^4Sq^2Sq^1b_2$, $Sq^4Sq^2b_3$, $Sq^2Sq^1b_4$, Sq^2b_5, Sq^3b_4, Sq^1b_6	$Sq^8Sq^1b_1=0$, $Sq^6Sq^2Sq^1b_1=0$, $Sq^5Sq^2b_2=Sq^9b_1+Sq^7Sq^2b_1$, $Sq^6b_3+Sq^4Sq^2Sq^1b_2+Sq^7b_2+Sq^2Sq^1b_4=0$, $Sq^5Sq^1b_3=Sq^9b_1$
12	Sq^8b_2, $Sq^7Sq^1b_2$, Sq^3b_5, $Sq^6Sq^2b_2$, $Sq^5Sq^2Sq^1b_2$, Sq^7b_3, $Sq^5Sq^2b_3$, Sq^4b_4, $Sq^{10}b_1$, $Sq^8Sq^2b_1$, $Sq^7Sq^3b_1$	$Sq^5Sq^2Sq^1b_2=Sq^4Sq^2Sq^1b_3+Sq^{10}b_1+Sq^8Sq^2b_1$, $Sq^6Sq^1b_3=Sq^6Sq^2b_2+Sq^7Sq^3b_1$, $Sq^9Sq^1b_1=0$, $Sq^3Sq^1b_4=Sq^7b_3+Sq^5Sq^2Sq^1b_2$, $Sq^2Sq^1b_5=Sq^{10}b_1$, $Sq^7Sq^2Sq^1b_1=0$, $Sq^6Sq^3Sq^1b_1=0$, $Sq^7b_3+Sq^5Sq^2Sq^1b_2+Sq^4b_4+Sq^8b_2+Sq^3b_5+Sq^2b_6=0$

		次数
b_1	$Sq^1a_1=0$	2
b_2	$Sq^2a_2+Sq^3a_1=0$	4
b_3	$Sq^2Sq^1a_2+Sq^1a_3+Sq^4a_1=0$	5
b_4	$Sq^4a_3+Sq^7a_1+Sq^6a_2=0$	8
b_5	$Sq^4Sq^1a_3+Sq^1a_4+Sq^8a_1+Sq^7a_2=0$	9
b_6	$Sq^2a_4+Sq^4Sq^2a_3+Sq^8a_2+Sq^7Sq^2a_1=0$	10

次に，自由 $\mathscr{A}$-加群 B_3 は，Ker $(B_2 \to B_1)$ において選ばれた生成元に対応する生成元により生成される．これら生成元 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \cdots$ の次数はそれぞれ $2, 4, 5, 8, 9, 10, \cdots$ である．準同型 $B_3 \to B_2$ は次のように写す：

$\beta_1 \to Sq^1\alpha_1$

$\beta_2 \to Sq^2\alpha_2 + Sq^3\alpha_1$

$\beta_3 \to Sq^2Sq^1\alpha_2 + Sq^1\alpha_3 + Sq^4\alpha_1$

$\beta_4 \to Sq^4\alpha_3 + Sq^7\alpha_1 + Sq^6\alpha_2$

$\beta_5 \to Sq^4Sq^1\alpha_3 + Sq^1\alpha_4 + Sq^8\alpha_1 + Sq^7\alpha_2$

$\beta_6 \to Sq^2\alpha_4 + Sq^4Sq^2\alpha_3 + Sq^8\alpha_2 + Sq^7Sq^2\alpha_1$

……………………………………………

ここで，この核は $\tilde{\mathscr{A}}$ の関係式の $\mathscr{A}$-加群の関係式により生成される $\mathscr{A}$-加群に同型な $\mathscr{A}$-加群である．この加法生成元は表の右の列に示されている．これ

第　3　行

N	生　成　元	関　係　式
3	c_1	—
4	—	$Sq^1c_1=0$
5	Sq^2c_1	—
6	c_2, Sq^3c_1	$Sq^2Sq^1c_1=0$
7	Sq^4c_1, Sq^1c_2	$Sq^3Sq^1c_1=0$
8	Sq^5c_1, Sq^2c_2	$Sq^4Sq^1c_1=0$
9	Sq^6c_1, $Sq^4Sq^2c_1$, Sq^3c_2, $Sq^2Sq^1c_2$	$Sq^5Sq^1c_1=0$
10	c_3, Sq^7c_1, $Sq^5Sq^2c_1$, Sq^4c_2, $Sq^3Sq^1c_2$	$Sq^6Sq^1c_1=0$, $Sq^4Sq^2Sq^1c_1=0$
11	c_4, Sq^8c_1, $Sq^6Sq^2c_1$, Sq^5c_2, Sq^1c_3	$Sq^7Sq^1c_1=0$, $Sq^5Sq^2Sq^1c_1=0$, $Sq^4Sq^1c_2+Sq^5c_2+Sq^8c_1+Sq^1c_3=0$
12	c_5, Sq^9c_1, $Sq^7Sq^2c_1$, $Sq^6Sq^3c_1$, Sq^6c_2, $Sq^4Sq^2c_2$, Sq^2c_3, Sq^1c_4	$Sq^5Sq^1c_2=Sq^9c_1$, $Sq^8Sq^1c_1=0$, $Sq^6Sq^2Sq^1c_1=0$

		次　数
c_1	$Sq^1b_1=0$	3
c_2	$Sq^2b_2+Sq^1b_3+Sq^4b_1=0$	6
c_3	$Sq^1b_5+Sq^5b_3+Sq^8b_1+Sq^4Sq^1b_3=0$	10
c_4	$Sq^6b_3+Sq^4Sq^2Sq^1b_2+Sq^7b_2+Sq^2Sq^1b_4=0$	11
c_5	$Sq^2b_6+Sq^3b_5+Sq^4b_4+Sq^7b_3+Sq^8b_2+Sq^5Sq^2Sq^1b_2=0$	12

に極小生成元系を選ぼう．高々次数 12 までは，この系は次数 3, 6, 10, 11, 12 の 5 個の生成元を含み，自由 $\mathscr{A}$-加群 B_4 の生成元 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ はこれらと一対一に対応する．このとき，準同型 $B_4 \to B_3$ は次のように与えられる：

$\gamma_1 \to Sq^1\beta_1$

$\gamma_2 \to Sq^2\beta_2 + Sq^1\beta_3 + Sq^4\beta_1$

$\gamma_3 \to Sq^1\beta_5 + Sq^5\beta_3 + Sq^8\beta_1 + Sq^4Sq^1\beta_3$

$\gamma_4 \to Sq^6\beta_3 + (Sq^4Sq^2Sq^1 + Sq^7)\beta_2 + Sq^2Sq^1\beta_4$

$\gamma_5 \to S^2\beta_6 + Sq^3\beta_5 + Sq^4\beta_4 + Sq^7\beta_3 + (Sq^8 + Sq^5Sq^2Sq^1)\beta_2$

……………………………………………………………

第 4 行

N	生 成 元	関 係 式
4	d_1	—
5	—	$Sq^1d_1=0$
6	Sq^2d_1	—
7	Sq^3d_1	$Sq^2Sq^1d_1=0$
8	Sq^4d_1	$Sq^3Sq^1d_1=0$
9	Sq^5d_1	$Sq^4Sq^1d_1=0$
10	Sq^6d_1, $Sq^4Sq^2d_1$	$Sq^5Sq^1d_1=0$
11	d_2, Sq^7d_1, $Sq^5Sq^2d_1$	$Sq^6Sq^1d_1=0$, $Sq^4Sq^2Sq^1d_1=0$
12	Sq^1d_2, Sq^8d_1, $Sq^6Sq^2d_1$	$Sq^7Sq^1d_1=0$, $Sq^5Sq^2Sq^1d_1=0$

d_1　$Sq^1c_1=0$　4
d_2　$Sq^4Sq^1c_2+Sq^5c_2+Sq^8c_1+Sq^1c_3=0$　11　} 次 数

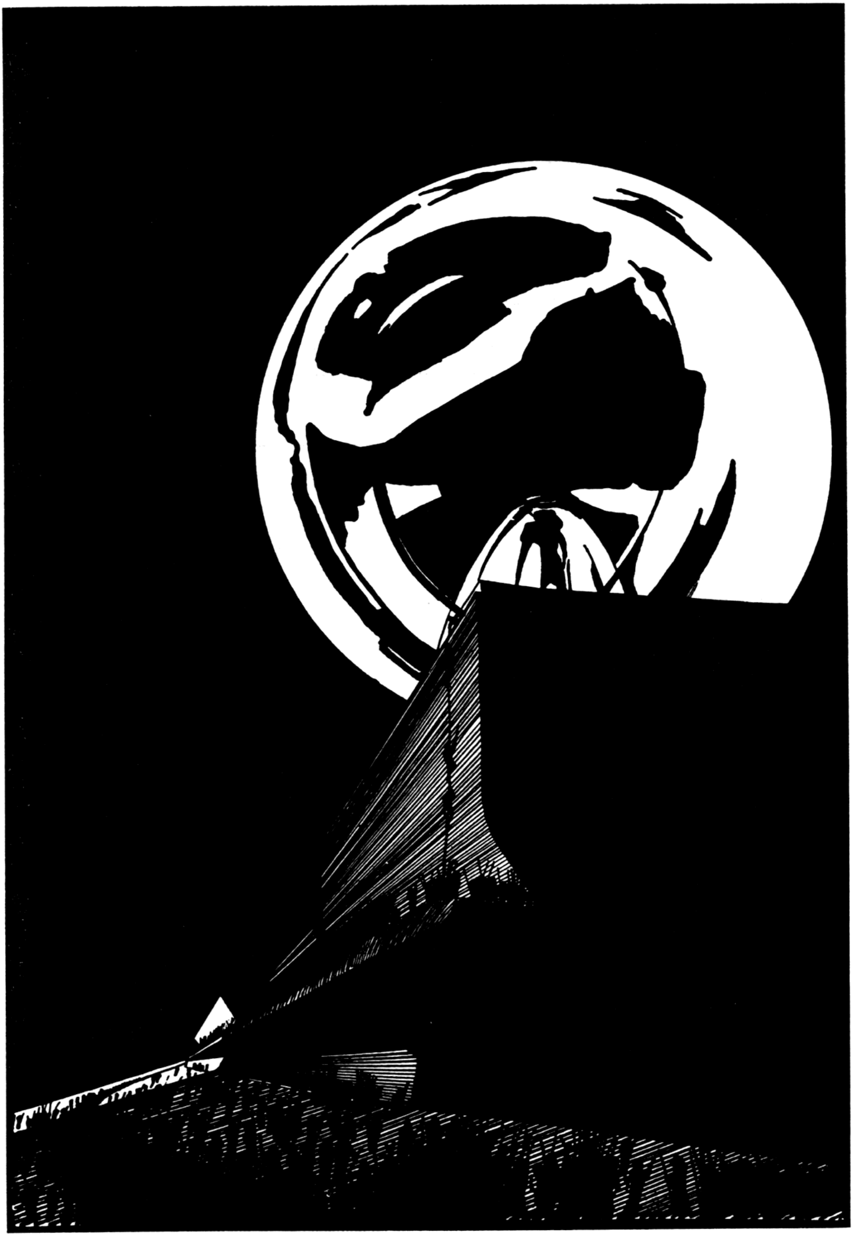
自由 $\mathscr{A}$-加群 B_5 が高々次数 12 までに，それぞれ次数 4 と 11 に 2 つの生成元 δ_1 と δ_2 をもつことは同様に示すことができる．このとき準同型 $B_5 \to B_4$ は次で与えられる：

$\delta_1 \to Sq^1\gamma_1$

$\delta_2 \to (Sq^4Sq^1 + Sq^5)\gamma_2 + Sq^8\gamma_1 + Sq^1\gamma_3$

自由 $\mathscr{A}$-加群 $B_6, B_7, \cdots, B_{13}$ は高々次数 12 までに，次数がそれぞれ 5, 6, …, 12 にそれぞれ 1 つの生成元をもつ．各準同型 $B_k \to B_{k-1}$ は，それぞれの生成元を 1 つ前の Sq^1 像に写す．

すでに示されているように，$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_{s-1}, \boldsymbol{Z}_2)$ であり，し



たがって，Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ のホモロジー $H^{s,t}(\mathscr{A})$ の加法生成元は，高々次数 12 までは，完全に表記することができる．すなわち，$t\leq 12$ について Adams スペクトル系列の第 2 項の加法構造がわかる：

					$\cdots$							
				δ_1							δ_2	
			γ_1			γ_2				γ_3	γ_4	γ_5
		β_1		β_2	β_3			β_4	β_5	β_6		
	α_1	α_2		α_3				α_4				
1												
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

さて，ここで一般的な考察をいくつかしておこう．$\mathscr{A}$-加群 Ker $(B_k\to B_{k-1})$ における関係式の最小次数は，明らかに生成元の最小次数よりも少なくとも 1 つだけ高い．したがって，B_k の生成元の最小次数は B_{k-1} のそれよりも高い．B_k が次数 $k-1$ の生成元をもち，低い次数には生成元をもたないのはいずれにせよ明らかであるから，実は，この考察は今の場合何も情報を与えない．したがって，任意に高い次数では零でない元が対角線 $t-s=1$ 上でさえも現われないとは保証できない．もっと多くの情報は，n 次元球面の (Serre の意味での) 最初のキリング空間 $S^n|_n$ の Adams スペクトル系列を調べることにより得ることができる．そのコホモロジーの $\mathscr{A}$-加群はファイバー空間 $S^n\xrightarrow{S^n|_n}K(\boldsymbol{Z},n)$ から得られる．これは，加群 $\tilde{H}^*(K(\boldsymbol{Z},n);\boldsymbol{Z}_2)$ の次数 $>n$ の部分である．これは (次数を 1 ずらして)，元 Sq^1 により生成される左イデアルによる $\tilde{\mathscr{A}}$ の商に等しいことが知られている．したがって，$S^n|_n$ のスペクトル系列の第零行は S^0 のスペクトル系列の第 1 行と同じであるが，生成元 α_1 は消去され，次数はずれる．もっと高い次数でも S^0 と $S^n|_n$ のスペクトル系列は，次数のずれ (1 だけ上へ，$n-1$ だけ左へ) と S^0 の座標角の 2 等分線上にある元だけ異なることは容易にわかる．特に，考えている次数では，E_2 項は次ページの表のような形をしている．

この事実の証明は読者に任せる．($\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{**}(\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{Z}_2)$ の計算よりももっと簡単な $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{**}(\tilde{\mathscr{A}}/\{Sq^1\},\ \boldsymbol{Z}_2)$ を計算で直接確かめるのは，恐らく演習としてはもっと

												δ_2		
							γ_2				γ_3	γ_4	γ_5	
					β_2	β_3			β_4	β_5	β_6			
0		…	α_2		α_3				α_4					
	0		$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$	$n+6$	$n+7$	$n+8$	$n+9$	$n+10$	$n+11$	$n+12$

好適であろう.)

次に，B_k の生成元の最小次数に関する上の考察をこのスペクトル系列に適用しよう．S^0 の Adams スペクトル系列において，2番目の生成元の次数も k の増加と共に増加する．すなわち，第 s 行の2等分線の右側にある空白の場所の個数は，s が増加するにつれて減少することはないことがわかる．これを考慮に入れると，われわれのスペクトル系列の第2項は $t-s\leq 7$ について自明であることがわかる．これは，球面の安定ホモトピー群の2成分の位数に関する一つの結果を意味する．実際，次数を考慮すると，考えている領域では，2つの自明でない微分があるだけである．すなわち，第1に，α_2 はいずれかの微分によって消される可能性があり，第2に，β_6 は微分 d_2 により δ_2 の上へ写されるかもしれない．α_2 が万一消えたら $\pi_{n+1}(S^n)$ の2成分は零になり，一方，これは $\boldsymbol{Z}_2$ に等しいことが知られているから，第1の可能性はおこらない．$d_2\beta_6$ の問題については乗法構造の証明がつくまで延期しよう．とにかく，$k=1,2,3,4,5,6,7$ に対する $\pi_k^S(S^0)$ の2成分の位数はそれぞれ $2,2,8,0,0,2,8$ に等しい．

乗法構造

明らかに，$\mathrm{Ker}\,(B_k\to B_{k-1})$ の分解は適当な項で中断することにより分解 $\boldsymbol{Z}_2\leftarrow B_1\leftarrow B_2\leftarrow\cdots$ から得られる．したがって，

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(\mathrm{Ker}\,(B_k\to B_{k-1}),\boldsymbol{Z}_2)=\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s+k,t}(\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{Z}_2)$$

が得られ，2つの Ext 加群への $H^{s,t}(\mathscr{A})$ の作用は同じである．

ある元 $\alpha_1\in H^{**}(\mathscr{A})$ による「乗法表」を編集することにしよう．一つの元 $a_1\in\tilde{\mathscr{A}}=\mathrm{Ker}\,(B_1\to\boldsymbol{Z}_2)$ を選び，a_1 を生成元に写す $\mathscr{A}$-準同型 $\tilde{\mathscr{A}}\to\boldsymbol{Z}_2$ を考える．これは次数を1だけ下げる．一方，$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{**}(\boldsymbol{Z}_2,\boldsymbol{Z}_2)$ から $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{**}(\tilde{\mathscr{A}},\boldsymbol{Z}_2)$ への誘

導された準同型は明らかに次数を1だけ上げ，したがって，$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2) \to \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t+1}(\tilde{\mathscr{A}}, \boldsymbol{Z}_2) \cong \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s+1,t+1}(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2)$ である．この準同型は元1を α_1 の上へ，任意の元 ξ を $\xi\alpha_1$ の上へ写す．

Ext 加群の間の準同型を定義するためには，分解の間の対応する写像，すなわち，次の可換な図式が必要である．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\boldsymbol{Z}_2 & \xleftarrow{\partial_1} & B_1 & \xleftarrow{\partial_2} & B_2 & \xleftarrow{\partial_3} & B_3 & \xleftarrow{\partial_4} & \cdots \\
\uparrow f_1 & & \uparrow f_2 & & \uparrow f_3 & & \uparrow f_4 & & \\
\tilde{\mathscr{A}} & \xleftarrow{\partial_2} & B_2 & \xleftarrow{\partial_3} & B_3 & \xleftarrow{\partial_4} & B_4 & \xleftarrow{\partial_5} & \cdots
\end{array}
$$

ただし，上の系列は今考えている加群 $\boldsymbol{Z}_2$ の分解を表わし，一方，下の系列は $\tilde{\mathscr{A}}$ の分解になるように切断した同じ分解であり，f_1 は a_1 を $1 \in \boldsymbol{Z}_2$ の上に写す準同型である．残りの準同型は次数を1だけ下げ，図式が可換になるように定義しなければならない．$B_2, B_3, B_4, \cdots$ は自由 $\mathscr{A}$-加群であるから，これらの準同型は，各生成元の像が与えられると定義される．

B_2 から始めよう．これは生成元 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ をもつ自由 $\mathscr{A}$-加群である．$\partial_2(\alpha_1) = a_1$ かつ $f_1(a_1) = 1$ であり，したがって，$f_2(\alpha_1)$ は $\partial_1(f_2(\alpha_1)) = 1$ が成り立つ B_1 の元である．さて，B_1 は Steenrod 代数であり，1はその単位元 u の像である．したがって，$f_2(\alpha_1) = u$ かつ残りの生成元 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots$ は合成写像 $B_2 \xrightarrow{\partial_2} \tilde{\mathscr{A}} \xrightarrow{f_1} \boldsymbol{Z}_2$ により零になる．そこで $k \geq 2$ について $f_2(\alpha_k) = 0$ とおく．(われわれが構成しているこの準同型は一意的には定まらないことに注意する．α_k の像の代わりに対応する次数の任意の元を選ぶこともできる．すなわち，上の図式の可換性のみがかかわっているので，これを可能な限り単純に構成する．そこで，$f_2(\alpha_1) = u$ かつ $k \geq 2$ について $f_2(\alpha_k) = 0$ とおく．)次に $f_3 : B_3 \to B_2$ を定義しよう．$f_2(\partial_3(\beta_1)) = Sq^1 u$ である．さて，∂_2-像が $Sq^1 u$ である B_2 の元を選ばなければならない．これは例えば α_1 でよい．$f_2(\partial_3(\beta_2)) = Sq^3 u$ かつ $\partial_2(Sq^1 \alpha_2) = Sq^3 u$ であるので，$f_3(\beta_2) = Sq^1 \alpha_2$ とおく．この構成を続けよう．考えている範囲の準同型 $f_k : B_k \to B_{k-1}$ は次ページのように与えられる．

残っているのは，Hom と Ext において誘導された準同型を調べることである．ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_k, \boldsymbol{Z}_2)$ の生成元は $\mathscr{A}$-加群 B_2 の生成元に対応する(これらは同じ記号で表わしている)．明らかに，$\mathscr{A}$-加群 B_{k-1} のある生成元に対応する $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_{k-1}, \boldsymbol{Z}_2)$ の元は，この生成元が準同型 $B_k \to B_{k-1}$ の像の中に

$f_2: B_2\to B_1$	$f_3: B_3\to B_2$	$f_4: B_4\to B_3$	$f_5: B_5\to B_4$
$\alpha_1\to u$	$\beta_1\to\alpha_1$	$\gamma_1\to\beta_1$	$\delta_1\to\gamma_1$
$\alpha_2\to 0$	$\beta_2\to Sq^1\alpha_2$	$\gamma_2\to\beta_3$	$\delta_2\to\gamma_3$
…	$\beta_3\to\alpha_3$	$\gamma_3\to\beta_5+Sq^1\beta_4$	…
	$\beta_4\to Sq^3\alpha_3$	$\gamma_4\to Sq^2\beta_4+Sq^1\beta_5$	
	$\beta_5\to\alpha_4$	…	
	$\beta_6\to Sq^7\alpha_2$		
	…		

ないときはいつでも $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_{k-1}, \boldsymbol{Z}_2)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_k, \boldsymbol{Z}_2)$ により零になる．もし，これが B_k の生成元の像ならば，$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B_k, \boldsymbol{Z}_2)$ の対応する元の上に写される．したがって，$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{**}(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2)$ の上述の生成元は，$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{**}(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2)\to\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{**}(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2)$ により次の元の上へ写される：

$1\to\alpha_1$	$\alpha_1\to\beta_1$	$\beta_1\to\gamma_1$	$\gamma_1\to\delta_1$
	$\alpha_2\to 0$	$\beta_2\to 0$	$\gamma_2\to 0$
	$\alpha_3\to\beta_3$	$\beta_3\to\gamma_2$	$\gamma_3\to\delta_2$
	$\alpha_4\to\beta_5$	$\beta_4\to 0$	$\gamma_4\to 0$
		$\beta_5\to\gamma_3$	$\gamma_5\to 0$
		$\beta_6\to 0$	

したがって，

$$\alpha_1\alpha_1=\beta_1,\ \alpha_1\alpha_2=0,\ \alpha_1\alpha_3=\beta_3,\ \alpha_1\alpha_4=\beta_5,\ \alpha_1\beta_1=\gamma_1,\ \alpha_1\beta_2=0,\ \alpha_1\beta_3=\gamma_2,$$
$$\alpha_1\beta_4=0,\ \alpha_1\beta_5=\gamma_3,\ \alpha_1\beta_6=0,\ \alpha_1\gamma_1=\delta_1,\ \alpha_1\gamma_2=0,\ \alpha_1\gamma_3=\delta_2,\ \alpha_1\gamma_4=0,\ \alpha_1\gamma_5=0$$

同様に，$\alpha_2\alpha_2=\beta_2, \alpha_2\alpha_4=\beta_6, \alpha_2\beta_2=\gamma_2, \alpha_2\beta_6=\gamma_5, \alpha_3\alpha_3=\beta_4, \alpha_3\alpha_4=\gamma_5$ を得ることができ，われわれにわかっている元のその他の積は零である．

Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ のホモロジー群の元には標準的な記号がある．すなわち，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ に対する標準的記号は $h_0, h_1, h_2, \cdots$ である．このとき，われわれが扱っているスペクトル系列の E_2 項の部分は次ページの形をしている．ただし，a は新しい乗法生成元である．ところで，明らかに $d_2\beta_6=d_2(h_1h_3)=0$，したがって $\pi_{n+7}(S^n)$ の 2 成分の位数は 16 である．

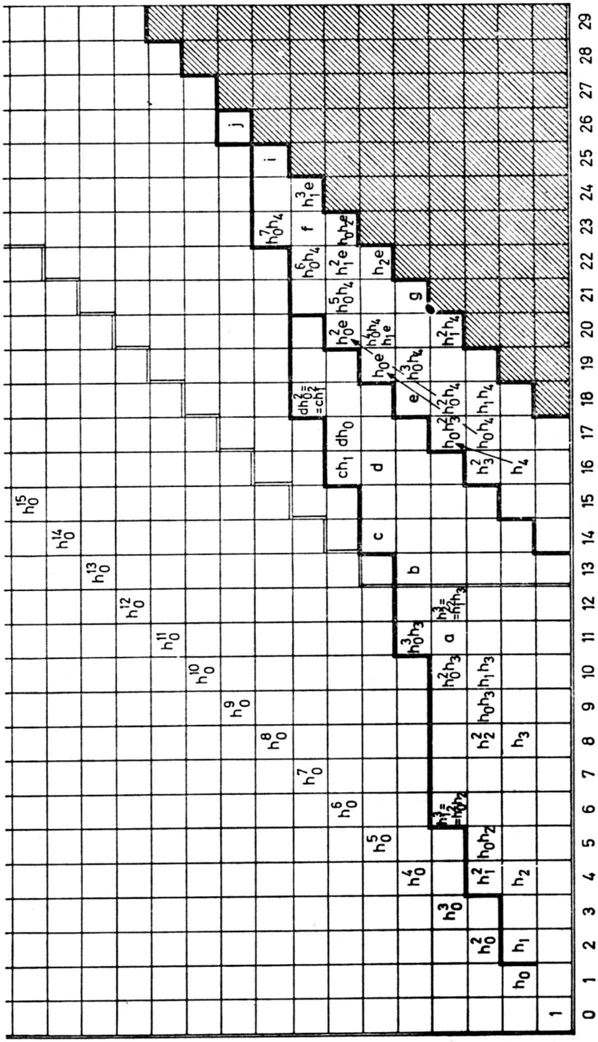
球面のホモトピー群の計算は 2 つの段階——Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ のホモロジーの計算と Adams スペクトル系列の微分——から成ることがわかる．最初の作業はいくらでも長く続けることができるまったく機械的な計算に帰着される．

						h_0^6					
					h_0^5						
				h_0^4						$h_0^3h_3$	
			h_0^3			$h_1^3=$ $=h_0^2h_2$			$h_0^2h_3$	a	$h_2^3=$ $=h_1^2h_3$
		h_0^2		h_1^2	h_0h_2			h_2^2	h_0h_3	h_1h_3	
	h_0	h_1		h_2				h_3			
1											

J. F. Adams : Stable Homotopy Theory, LNMS #3, 1966 には，このような計算結果が $t-s\leq 17$ まで述べられている．上の表で示されている E_2 項の図はそこから借りたものである．

このような図はたいして困難なく得られるので，これは証明されたものとみなしてよいであろう．(これを編集するには，われわれが行なった次数 12 の代わりに次数 27 まで Steenrod 代数 $\mathscr{A}$ を調べなければならない.) 特に，このとき，$10\leq t\leq 27$ について $E_2^{10,t}=0$ を得る．その結果，$E_2^{s,t}$ は $0<t-s\leq 17$ についていかなる新しい元も含まない (次ページの表参照).

次数を考慮すれば，乗法生成元 $h_0, h_1, h_2, h_3, a, b, c, d, e, f, i, j$ の微分は零に等しいことがわかる．したがって，$t-s\leq 13$ について $E_2^{s,t}=E_\infty^{s,t}$ であり，球面のホモトピー群については，これは次の情報を意味する：最初の 13 次元までの $\pi_k^S(S^0)$ の 2 成分の位数は 2, 2, 8, 0, 0, 2, 16, 4, 8, 2, 8, 0, 0 である．元 $1, h_0, h_0^2, \cdots$ は $\pi_0^S(S^0)\cong \boldsymbol{Z}$ に同伴な群 $\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2\oplus\cdots$ の生成元であり，$\boldsymbol{Z}$ におけるフィルター付けは $\boldsymbol{Z}\supset 2\boldsymbol{Z}\supset 4\boldsymbol{Z}\supset 8\boldsymbol{Z}\supset\cdots$ である．したがって，h_0^k は群 $2^k\boldsymbol{Z}/2^{k+1}\boldsymbol{Z}$ の生成元であり，もっと高いフィルターの元を除いて $2^k\in\boldsymbol{Z}$ により表わされる．元 $h_2\in E_\infty^{1,4}$ は $\pi_3^S(S^0)$ のある部分群による商群の生成元である．代表元 $\alpha\in\pi_3^S(S^0)$ を選ぶと，h_0h_2 と $h_0^2h_2$ は零と異なるから，α と 2 および $4\in\pi_0^S(S^0)$ との合成は自明でない．すなわち，$4\alpha\not\equiv 0 \pmod 2$，よって α の位数 ≥ 8 である．一方，$\pi_3^S(S^0)$ の 2 成分の位数は 8 であるから，この群は $\boldsymbol{Z}_8$ に等しい．同様に $\pi_7^S(S^0)$ と $\pi_{11}^S(S^0)$ の 2 成分はそれぞれ $\boldsymbol{Z}_{16}$ と $\boldsymbol{Z}_8$ である．$\pi_8^S(S^0)$ に同伴


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29
1
h0
h1
h2
h3
h4
c
d
e
f
g
i
j
ch1
dh0
h0h2
h0h3
h1h3
h0h4
h1h4
h2e
h0e
h1e

した群は2つの生成元 h_1h_3 と a をもち，積 $h_0h_1h_3$ は $E_\infty^{3,11}$ において零である．このとき，$\pi_8^S(S^0)$ において2と h_1h_3 の合成はフィルター >3 をもつ．さて，スペクトル系列から明らかなように，$\pi_8^S(S^0)$ にはそのような元は全然存在しない．したがって，$\pi_8^S(S^0)$ の2成分は $\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2$ に等しい．最後に，$\pi_9^S(S^0)$ は位数8の2成分をもつ．$\pi_8^S(S^0)$ において用いられた議論をこの群に適用して，この群は $\boldsymbol{Z}_8$ に等しくなれないことがわかる．したがって，この群は $\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2$ または $\boldsymbol{Z}_4\oplus\boldsymbol{Z}_2$ のいずれかである．後者の場合，$\boldsymbol{Z}_4$ の生成元は E_∞ において $h_2^3=h_1^2h_3$ により表わされる．すなわち（高次のフィルター，すなわち，位数2の元を除いて）これは合成 $\alpha\circ\alpha\circ\alpha$，ただし，$\alpha$ は $\pi_3^S(S^0)$ の生成元，である．さて，2成分が $\boldsymbol{Z}_2$ である $\pi_6^S(S^0)$ の元である $\alpha\circ\alpha$ はすでに位数2であったから，この合成 $\alpha\circ\alpha\circ\alpha$ は位数2をもつ．

以上より，$1\leq n\leq 13$ について $\pi_n^S(S^0)$ の2成分の次の表を得る：

$$\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_8, 0, 0, \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_{16}, \boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_8, 0, 0$$

η は $\pi_1^S(S^0)$ の生成元を表わすとする．このとき，$\pi_2^S(S^0)$ は η^2 により生成され，このとき，$\eta^3=4\nu$ が成り立つ．ただし ν は $\pi_3^S(S^0)$ の生成元である．さらに，$\pi_6^S(S^0)$ は ν^2 により生成される．$\pi_7^S(S^0)$ の元は分解しない．この生成元を σ で表わす．群 $\pi_8^S(S^0)$ は $\eta\sigma$ と非分解な ε で生成される．$\pi_9^S(S^0)$ は $\nu^3=\eta^2\sigma+\eta\varepsilon$ とさらに2つの生成元，このうち1つは明らかに非分解な μ，第2のものは恐らく $\eta\varepsilon$ に等しいもので生成される．次に，$\pi_{10}^S(S^0)$ は η にこれらの生成元の1つ μ を掛けた $\eta\mu$ で生成される．$\pi_{11}^S(S^0)$ は非分解な元 ζ で生成される．

この議論全体はスペクトル系列について得た結果に含まれる．

最後に，$p>2$ についてこれらのホモトピー群の p 成分について少し述べておこう．唯1つの難しい点は $p=3$ の場合におこり，このときは Adams スペクトル系列に頼らねばならない．最初の自明でない p 成分は $\pi_{2p-3}^S(S^0)$ に，第2のものは $\pi_{4p-5}^S(S^0)$ におこることを思いおこそう．これらはいずれも $\boldsymbol{Z}_p$ に等しく，したがって，群 $\pi_n^S(S^0), 1\leq n\leq 13$，は $p>3$ について $\boldsymbol{Z}_5\subset\pi_7^S(S^0)$ と $\boldsymbol{Z}_7\subset\pi_{11}^S(S^0)$ を除いて p 成分をもたない．$\pi_n^S(S^0), 1\leq n\leq 13$，の3成分は以下の通りである：

$$0, 0, \boldsymbol{Z}_3, 0, 0, 0, \boldsymbol{Z}_3, 0, 0, 0, \boldsymbol{Z}_9, 0, \boldsymbol{Z}_3$$

（これらは，mod 3 Adams スペクトル系列を用いて確かめることができるが，これは mod 2 の場合の作業よりはるかに容易である）．次数を考慮すれば，こ

れらのホモトピー群の合成積は自明である．したがって,

$$\pi_n(S^n) \cong \boldsymbol{Z} \qquad (n\geq 1)$$
$$\pi_{n+1}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_2 \qquad (n\geq 3)$$
$$\pi_{n+2}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_2 \qquad (n\geq 4)$$
$$\pi_{n+3}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_{24} \qquad (n\geq 5)$$
$$\pi_{n+4}(S^n) = 0 \qquad (n\geq 6)$$
$$\pi_{n+5}(S^n) = 0 \qquad (n\geq 7)$$
$$\pi_{n+6}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_2 \qquad (n\geq 8)$$
$$\pi_{n+7}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_{240} \qquad (n\geq 9)$$
$$\pi_{n+8}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2 \qquad (n\geq 10)$$
$$\pi_{n+9}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2 \oplus \boldsymbol{Z}_2 \qquad (n\geq 11)$$
$$\pi_{n+10}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_2 \qquad (n\geq 12)$$
$$\pi_{n+11}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_{504} \qquad (n\geq 13)$$
$$\pi_{n+12}(S^n) = 0 \qquad (n\geq 14)$$
$$\pi_{n+13}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_3 \qquad (n\geq 15)$$

第 14 次 および それ以後のホモトピー群を計算するには，次元の考慮だけでは，微分の自明性を確かめられないので，いくつかの難点に出会う．実際，自明でない微分は一番最初の可能性として現われる：

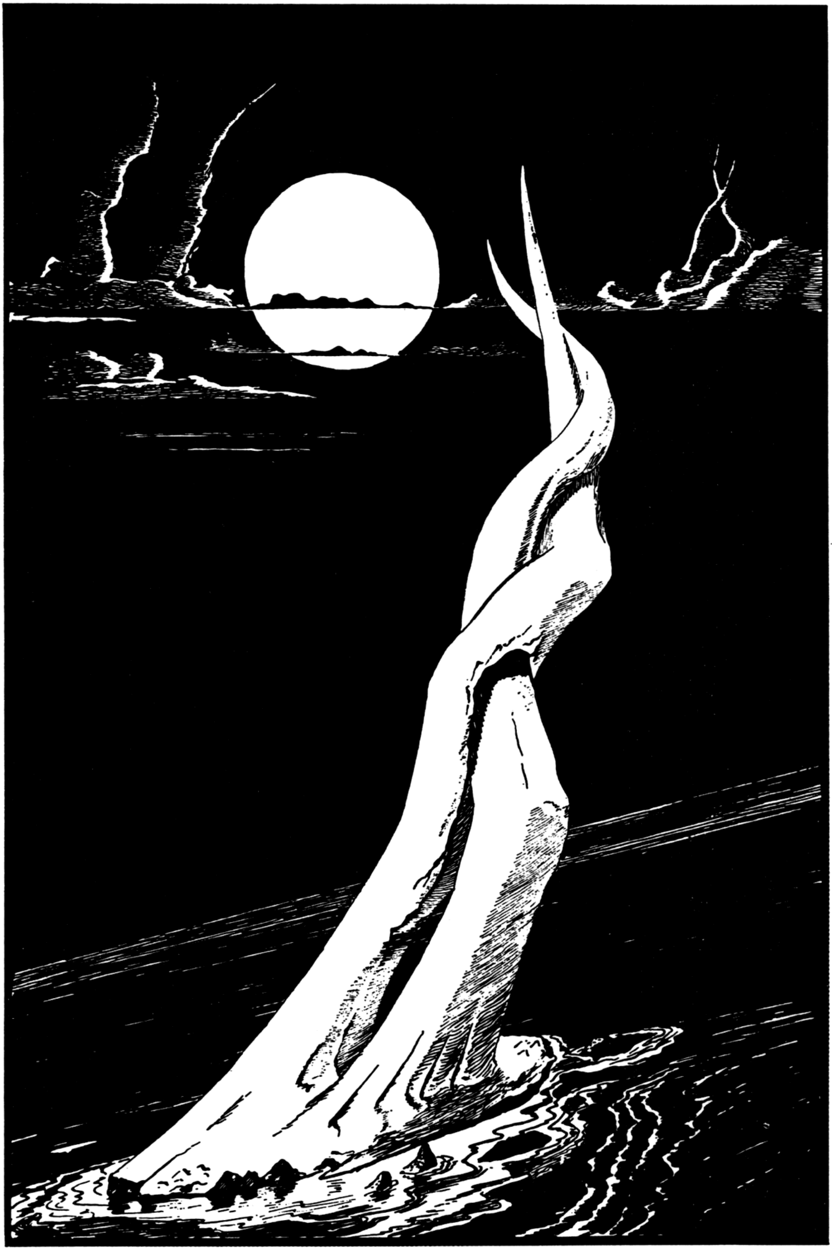
$$d_2(h_4) = h_0 h_3^2,\ d_3(h_0 h_4) = h_0 i,\ d_3(h_0^2 h_4) = h_0^2 i.$$

$E_2^{s,t}$ に関する Adams の定理

「……ホモロジー代数学が安定ホモトピー論に適用できることが示されている．この応用において，われわれは $\mathscr{A}$-加群，ただし，$\mathscr{A}$ は mod p Steenrod 代数，を取り扱う．この方法により幾何学的かつ具体的な結果を得るには，通常 2 つの異なった種類の作業を伴う．これを説明するために，次のスペクトル系列を考えよう：

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}(H^*(Y\,;\boldsymbol{Z}_p), H^*(X\,;\boldsymbol{Z}_p)) \Rightarrow {}_p\pi_*^S(X, Y)$$

ここに，E_2 項に現われる群 $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{s,t}$ は効率良く計算できる．すなわち，この手順は純粋に代数的である．しかし，スペクトル系列における微分 d_r の計算とか E_∞ 項から ${}_p\pi_*^S(X, Y)$ を構成する際の群拡大を決定するには，このような有効な方法は与えられていない．これらは位相幾何学の問題である．



E_2 項を計算するアルゴリズムは与えられているが，微分 d_r を求めるにはさらに英知(インテリヂエンス)が必要であるという説明に数理論理学者は満足するかもしれない．しかしながら，数学者の英知(インテリヂエンス)というのは，大量の退屈で機械的な作業を喜んで行なうのと少なくとも同じ程度の信頼すべき美点であると実際的な数学者は認めざるをえない．実際，このような微分 d_r が零でないことを示す機会が生じたときには，これは興味ある問題とみなされたし，十分に解決されてきたのである．しかしながら，群 $\mathrm{Ext}^{s,t}_{\mathscr{A}}(L,M)$ の計算の難しさは，この方法の最大の障害として残っている.」

論文 J. F. Adams : A periodicity theorem in homological algebra, Proc. Cambridge Phil. Soc., 62 (1966), 365–377, の序文から引用されたこの文章からわかるように，Adams 自身も Steenrod 代数のホモロジーのアルゴリズム的な計算可能性により，それらの計算の問題が最終的に解決されるとは考えていない．Adams はこの問題に関して一連の論文を発表しており，この中の重要な結果のいくつかは次の定理である．

底辺の3行に関する定理 (J. F. Adams : On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. Math., 72 (1960), 20–104)

(i) 群 $E_2^1=\oplus_t E_2^{1,t}$ は次数 2^i の線型独立な元 h_i により加法的に生成される．

(ii) 群 $E_2^2=\oplus_t E_2^{2,t}$ は $j\geq i\geq 0, j\neq i+1$ を満たす線型独立な元 h_jh_i により加法的に生成される．積 $h_{i+1}h_i$ はすべての i について零に等しい．

(iii) 群 $E_2^3=\oplus_t E_2^{3,t}$ において次の関係式が成り立つ：

$$h_{i+2}h_i^2=h_{i+1}^3, \quad h_{i+2}^2h_i=0$$

もし，元 $h_{j+1}h_jh_i, h_kh_{i+1}h_i, h_{i+2}h_i^2, h_{i+2}^2h_i$ を省略するならば，残りの積 $h_kh_jh_i$, $k\geq j\geq i\geq 0$ は E_2^3 において線型独立である．

実は，$a\in E_2^{3,11}$ のように h_i で表わすことのできない元も含まれているので，この定理は E_2 項の第3行を完全に記述しているわけではない．

自明性定理 (J. F. Adams : A periodicity theorem in homological algebra, Proc. Cambridge Phil. Soc., 62 (1966), 365–377)

$s<t<f(s)$ について $E_2^{s,t}=0$，ただし

$$f(4n) \quad =12n-1 \quad (n\geq 0)$$

$$f(4n+1)=12n+2 \quad (n\geq 0)$$

$$f(4n+2)=12n+4 \quad (n\geq 0)$$

$$f(4n+3)=12n+6 \quad (n \geq 0)$$

である．実は，ここで $E_2^{s,f(s)}$ は自明でない群である．

この定理により，零だけがある領域を図の上でみることができる．

周期性定理（同じ論文）

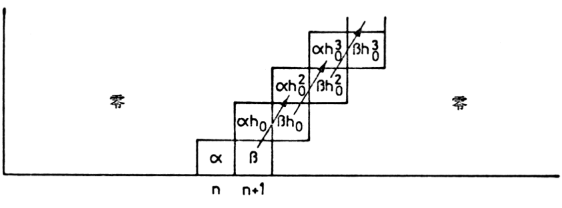
任意の k について直線 $t=3s$ の近傍 N_k が存在し，そこでは群 $E_2^{s,t}$ が s について周期 2^{k+2}，t については周期 $3\cdot 2^{k+2}$ をもち，周期的に現われる．このような近傍の和集合は領域 $s<t<g(s)$ である．ただし，$g(s)$ は $4s \leq g(s) \leq 6s$ を満たすある関数である．

最後に，明らかに自明でない微分をもつ Adams スペクトル系列の例を示そう．

$X=K(\boldsymbol{Z}_4, n)$，n は十分大，とする．この空間の次数が約 $2n$ までの安定ホモトピー群は次の通りである：$\pi_n^S(X) \cong \boldsymbol{Z}_4$，かつ $i \neq n$ について $\pi_i^S(X)=0$．したがって，これらの次数において，多元環 $\tilde{H}^*(X;\boldsymbol{Z}_2)$ は

$$\tilde{H}^*(K(\boldsymbol{Z}, n);\boldsymbol{Z}_2) \otimes \tilde{H}^*(K(\boldsymbol{Z}, n+1);\boldsymbol{Z}_2)$$

に同型である．すなわち，これは 2 つの生成元 $\alpha \in H^n(X;\boldsymbol{Z}_2)$, $\beta \in H^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}_2)$ をもち，$Sq^1\alpha = Sq^1\beta = 0$ を満たす．このとき，X の Adams スペクトル系列の E_2 項は自明でない群で満たされている 2 つの対角線をもつ．



したがって，このことから明らかに，$d_2\beta = \alpha h_0^2$ である．さもなければ $\pi_n^S(X)$ の位数は 4 に等しくなりえない．

§ 35. 高次（コホモロジー）作用素

この節では，新しい情報を与えようとは思っていない．むしろ前出の題材をもっと深く理解するのを目的にしている．

Adams スペクトル系列のわれわれの解説では，（概念を述べさえしなかった）

高次（コホモロジー）作用素を用いはしなかった．恐らく導入部門で，Adams スペクトル系列に関する一般的アイディアと共に高次作用素を紹介するのが適切であったかもしれない．実際，高次作用素の概念は，Adams の方法の根底にある基本であると言ってもよい．

この節はほとんど証明を含んでいない．読者はこれを一連の興味ある演習と考えてほしい．

高次作用素の構成

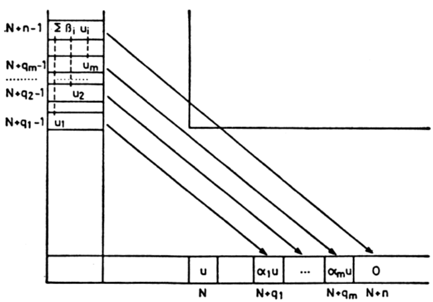
mod p Steenrod 代数 $\mathscr{A}_{(p)}$ における関係式

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_i\alpha_i=0 \qquad (*)$$

ただし，α_i, β_i はそれぞれ次数 q_i と $n-q_i$ の安定作用素，を考える．各 N について，任意の α_i は写像 $\tilde{\alpha}_i : K(\boldsymbol{Z}_p, N)\to K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i)$ を定義し，これらを合わせて写像 $\tilde{\alpha} : K(\boldsymbol{Z}_p, N)\to\Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i)$ を定義する．$\tilde{\alpha}$ により誘導されたファイバー空間

$$\begin{array}{ccc}
E & \longrightarrow & * \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i-1)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i-1)} \\
K(\boldsymbol{Z}_p, N) & \xrightarrow{\ \tilde{\alpha}\ } & \Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i)
\end{array}$$

は次の形のスペクトル系列をもつ．ただし，$u\in H^N(K(\boldsymbol{Z}_p, N)\,;\boldsymbol{Z}_p)$ および $u_i\in H^{N+q_i-1}(K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i-1)\,;\boldsymbol{Z}_p)$ はそれぞれの基本類である．



元 $\sum\beta_i u_i$ は E_∞ に生き残り，群 $H^{N+n-1}(E\,;\boldsymbol{Z}_p)$ における部分群 Im

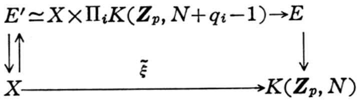
$[H^{N+n-1}(K(\boldsymbol{Z}_p, N)\,;\boldsymbol{Z}_p)\to H^{N+n-1}(E\,;\boldsymbol{Z}_p)]$ による剰余類を定義する．この剰余類の任意の元を選び，それを v で表わす．定義により準同型 $H^{N+n-1}(E\,;\boldsymbol{Z}_p)\to H^{N+n-1}(\Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i-1)\,;\boldsymbol{Z}_p)$ は v を $\sum_i \beta_i u_i$ の上へ写す．さらに，基本類 $u\in H^N(K(\boldsymbol{Z}_p, N)\,;\boldsymbol{Z}_p)$ も E_∞ に生き残り，$H^N(E\,;\boldsymbol{Z}_p)$ の元を定義するが，この元も u で表わす．

さて，任意の CW 複体 X に対して，**2 次作用素**とよばれる自然な準同型

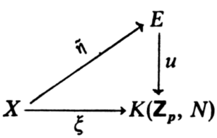
$$\varphi:\bigcap_{i=1}^{m}\mathrm{Ker}\,[\alpha_i : H^N(X\,;\boldsymbol{Z}_p)\to H^{N+q_i}(X\,;\boldsymbol{Z}_p)]$$

$$\to H^{N+n-1}(X\,;\boldsymbol{Z}_p)/\bigcup_{i=1}^{m}\mathrm{Im}\,[\beta_i : H^{N+q_i-1}(X\,;\boldsymbol{Z}_p)\to H^{N+n-1}(X\,;\boldsymbol{Z}_p)]$$

を次のように定義する．$\xi\in H^N(X\,;\boldsymbol{Z}_p)$ とし，$i=1,2,\cdots,m$ について $\alpha_i\xi=0$ と仮定する．このとき，ξ に対応する写像 $\tilde{\xi}: X\to K(\boldsymbol{Z}_p, N)$ は $\tilde{\alpha}$ と合成すると零ホモトープである．したがって，ファイバー空間 $E\to K(\boldsymbol{Z}_p, N)$ から $\tilde{\xi}$ により誘導された X 上のファイバー空間 E' は自明である．(すなわち，E' は写像



$\tilde{\alpha}\circ\tilde{\xi}$ によりファイバー空間 $*\to\Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i)$ から誘導されたファイバー空間と一致する.）したがって，切断 $X\to E'$ が存在する．これと写像 $E'\simeq X\times\Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i-1)\to E$ との合成を $\tilde{\eta}: X\to E$ とするとき，次の可換な 3 角形を得る：



明らかに，$\tilde{\eta}^*u=\xi$ である．$\varphi(\xi)=\tilde{\eta}^*v\in H^{N+n-1}(X\,;\boldsymbol{Z}_p)$ と定義する．これは一意的には定義されない．この定義は切断の選び方に依存しているから，切断を固定しなければ，この準同型は完全には定義されない．どの程度までこの切断は定まるのであろうか？　この切断の存在は E' と $X\times\Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i-1)$ の間の同相写像の結果であり，これは対応 $x\longmapsto(x,*)$ により与えられる．一

方，他の任意の切断は対応 $x \longmapsto (x, \zeta(x))$ により与えられる．ただし，ζ：$X \to \Pi_i K(\boldsymbol{Z}_p, N+q_i-1)$ は任意の写像である．このような代入により $\varphi(\xi)$ は $\varphi(\xi)+\sum_{i=1}^{n} \beta_i \xi^*(u_i)$ に変わることが証明できる．したがって，$\varphi(\xi)$ は対応する商群の元として一意的に定義され，よって，関係式 (*) により 2 次作用素 φ を定義したことになる．これは，任意の X と N に対して与えられ，部分的に定義される多価準同型の族を表わす．(作用素 α_i の核の共通集合で定義されるから部分的であり，作用素 β_i の像を除いて定義されるから多価である.)

安定性とか自然性という 2 次作用素の基本的性質を定式化し，証明するのは読者に任せたい．

2 次作用素の 1 つの例は，2 次 Bockstein 準同型 β_2 である．これは，関係式 $\beta \circ \beta=0$ を用いて構成され，$\beta\xi=0$ を満たす元 $\xi \in H^N(X\,;\boldsymbol{Z}_p)$ 上で定義される．もう 1 つの直接的な定義は次の通りである．x は ξ を表わす双対輪体，$\tilde{x}$ は x の上へ射影される整係数双対鎖とする．$\beta\xi=0$ であるから，整係数双対鎖 y が存在して $\frac{1}{p}\delta\tilde{x} \equiv \delta y \pmod p$，すなわち，$\delta(\tilde{x}-py) \equiv 0 \pmod{p^2}$ である．このとき，mod p で簡約した双対輪体 $\frac{1}{p^2}\delta(\tilde{x}-py)$ は元 $\beta_2\xi \in H^{N+1}(X\,;\boldsymbol{Z}_p)$ を定める．3 次 Bockstein 作用素 β_3 の定義も同様であり，$\beta_3\xi$ は

$$\left(\frac{1}{p^3}\delta(\tilde{x}-py-p^2y')\right)$$

により表わされ，以下同様である．

これらは 3 次作用素などの例である．一般に，3 次作用素は関係式 $\sum \beta_i \varphi_i=0$ により定義される．ただし φ_i は 2 次，β_i は 1 次，すなわち，普通の作用素である．この話題に興味のある読者は任意の n について，n 次作用素の理論を展開することを勧める．(C. R. F. Maunder : Cohomology operations of the Nth kind, Proc. London Math. Soc., 13 (1963), 125–154 を参照)

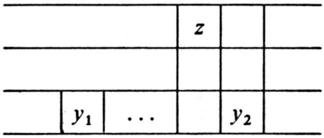
さらに，安定作用素に限らず，また，係数として $\boldsymbol{Z}_p$ だけでなく任意の群をとるならば，各種の作用素があって空間のホモトピー型はこれらにより完全に定まる．この定理を正確に定式化するのは容易ではないが，一度定式化すると証明は明らかである．

2 次作用素と Adams スペクトル系列の第 2 微分

2 次作用素と微分の間の関連性については，ここでは完全には議論しない．



むしろ，われわれは簡単な場合に議論を集中する．ある空間 X の Adams スペクトル系列において元 $y_1 \in E_2^{s,t-n+1}, y_2 \in E_2^{s,t}$ と $z \in E_2^{s+2,t+1}$ が与えられ，y_1 と y_2 は $\mathscr{A}$-加群 $\tilde{H}^*(X(s)\,;\,\boldsymbol{Z}_p)$ の生成元であると仮定する．さらに，φ は関係式 $\sum \beta_i \alpha_i = 0$ により定義される 2 次作用素であり，$y_2 = \varphi(y_1)$ と仮定する．



定義により，すべての i について $\alpha_i y_1 = 0$ である．作用素 β_i を（$\mathscr{A}$-加群 $\tilde{H}^*(X\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ において）この関係式に適用し，得られた関係式の和をとる．この結果は関係式 $0=0$ である．したがって，関係式の加群において 1 つの関係式を得る．これが，加群 $\tilde{H}^*(X(s)\,;\,\boldsymbol{Z}_2)$ における関係式の加群における関係式の $\mathscr{A}$-加群の生成元の 1 つであり，この生成元がまさに元 z であると仮定する．（これは次元の関係により仮定してよい.）このとき，Adams スペクトル系列において $d_2 y_2 = z$ である．

証明は読者に任せる．

高次作用素と球面のホモトピー群

Steenrod 代数のホモロジーは，高次作用素と明白な関連をもっている．第 1 行は 1 次作用素を含み，第 2 行は Steenrod 代数の関係式，すなわち，2 次作用素，第 3 行はこれらの間の関係式，すなわち，3 次作用素，などである．球面のホモトピー群の p 成分の各元は，Adams スペクトル系列の E_2 項のある元から得られる．コホモロジー作用素と球面のホモトピー群の元との間の関連性は何であろうか？

元 $\alpha \in \pi_{N+k}(S^N)$ は写像 $S^{N+k} \to S^N$ を定義する．この写像に沿って S^N に球体 D^{N+k+1} を接着する．このとき，2 つの胞体から成る複体 $X_\alpha = S^N \underset{\alpha}{\cup} e^{N+k+1}$ を得，そのコホモロジーは次数 N と $N+k+1$ において自明でない．このとき，E_2 項において α を与える元に対応する高次作用素は，X_α のコホモロジーにおいて自明でないことがわかる．この命題は，X_α と S^n の Adams スペクトル系列および包含 $S^n \subset X_\alpha$ により，これらのスペクトル系列の間に誘導される準同

型を考えることから容易に証明される.

例えば, 底辺の行の元 $Sq^2, Sq^4, Sq^8, \cdots \in \tilde{\mathscr{A}}$ を考える. E_∞ まで生き残るものは $\pi_{n+1}(S^n), \pi_{n+3}(S^n), \pi_{n+7}(S^n), \cdots$ の元を定義し, 作用素 $Sq^2, Sq^4, Sq^8, \cdots$ はそれぞれ, 複体 $S^n \cup e^{n+2}, S^n \cup e^{n+4}, S^n \cup e^{n+8}, \cdots$ の mod 2 コホモロジー群において自明ではない.

Adams が証明したように, すべての元 $h_4, h_5, \cdots$ が E_∞ に生き残るわけではない. すなわち, これらのあるものは, 自明でない微分をもつ. (例えば, $d_2h_4 = h_0h_3^2 \neq 0$.) したがって, もし 2 胞体複体 $X = S^n \cup e^{n+q}$ が存在して, Sq^q がそこで自明でないならば, 必然的に, $q=1,2,4,8$ である. 特に, これらの q に限って, 群 $\pi_{2q-1}(S^q)$ には奇数の Hopf 不変量をもつ元がある.

付録 3　Postnikov(の自然)系

Postnikov(の自然)系† については, ここで述べておきたい. それは, 第1に, この用語が広く文献で用いられているからであり, 第2に, Postnikov の論文は 1949 年以来, 代数的不変量を用いた空間のホモトピー性質の再構成について, より一層の研究をうながしてきたからである. この論文の用語は, もちろん, われわれが使ってきたものとは異なり, Leray スペクトル系列の概念も, ファイバー空間という用語さえも含んでいない.

よく知られているように, ホモトピー群は空間のホモトピー型を完全に定めるわけではない. しかし, 2つの例外, すなわち, すべてのホモトピー群が自明なとき, および, 1つを除いてすべてが自明のとき, がある. いずれの場合も, 空間は弱ホモトピー同値を除いてそのホモトピー群により定まる.

2つの自明でないホモトピー群をもつ空間の場合には, 状況は異なる. 実際, π_1 と π_2 は可換群, n_1 と n_2 は $1<n_1<n_2$ を満たす自然数とする. $\pi_{n_1}(X)=\pi_1$, $\pi_{n_2}(X)=\pi_2$ であり, 残る n について $\pi_n(X)=0$ であると仮定する. このとき, X から $K(\pi_1, n_1)$ へ明らかに写像が存在する. ファイバー $K(\pi_2, n_2-1)$ をもち, この写像と同値なファイバー空間の π_2 に係数をもつスペクトル系列を考える. このとき, 基本類 $e \in H^{n_2-1}(K(\pi_2, n_2-1); \pi_2)$ は, 転入により, 一方では転入先の群の任意の元であり, 他方で X のホモトピー型を完全に定義する $H^{n_2}(K(\pi_1, n_1); \pi_2)$ の元の上へ写される. したがって, 2つの自明でないホモ

† 現代の用語は「Postnikov タワー」

トピー群をもつ空間のホモトピー型は，この群とコホモロジー作用素とみなされる $H^{n_2}(K(\pi_1, n_1); \pi_2)$ の元により定まる．この元は空間 X の **Postnikov 不変量**とよばれる．

X は，次数 $n_1 < n_2 < n_3$ にのみ3つの自明でないホモトピー群 π_1, π_2, π_3 をもつと仮定する．最高次のホモトピー群を消去して，X から，2つの自明でないホモトピー群 $\pi_{n_1}(Y) = \pi_1$ と $\pi_{n_2}(Y) = \pi_2$ をもつ空間 Y への写像を得る．これはファイバー $K(\pi_3, n_3-1)$ をもつファイバー空間と考えてよい．このファイバー空間の基本類は転入により $H^{n_3}(Y; \pi_3)$ の元の上へ写される．この元は任意に選ぶことができて，X のホモトピー型を完全に定める．

この元はまた，空間 Y の1次 Postnikov 不変量である1次コホモロジー作用素の核の上で定義された2次コホモロジー作用素とみなしてよい．この2次作用素はいわゆる X の **2次 Postnikov 不変量**である．空間 X のホモトピー型は，ホモトピー群と2つのコホモロジー作用素，すなわち，π_1 に係数をもつ n_1 次元コホモロジー群で定義され π_2 に係数をもつ n_2 次元コホモロジー群に値をとる1次作用素と，この核の上で定義され π_3 に係数をもつ n_3 次元コホモロジー群に値をとる2次作用素，により定まる．この構成を続けて無限に移る操作をしても有限複体の場合には何の問題も起きないので次の定理を得る．

定理　任意の単連結有限 CW 複体 X のホモトピー型は，そのホモトピー群と1次，2次，3次，… のホモトピー作用素の系列により定まる．ただし，相次ぐ作用素は，前の作用素の核の上で定義される．

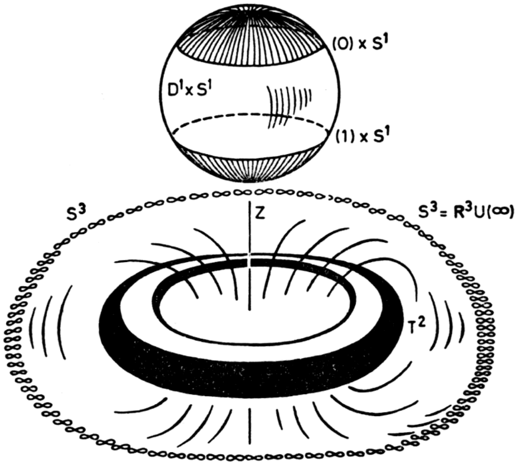
これらは空間 X の **Postnikov 不変量**とよばれる．この不変量のすべての系が空間 X の**自然な Postnikov 系**である．

付録 4　*J*-準同型

次に，証明なしで，球面の安定ホモトピー群のある部分群をいわゆる J-準同型の言葉で説明する Adams のいくつかの定理を定式化しよう．本書の枠内に留まるために，この準同型の純粋に幾何学的な定義を与える．

連続写像 $f: S^m \times S^n \to S^n$ が与えられているとする．このとき，球面 S^{m+n+1} から球面 S^{n+1} への写像を定義しよう．球面 S^{m+n+1} は，（後でもっと詳しく示すように）2つの輪環体 $\Pi_1 = S^m \times D^{n+1}$ と $\Pi_2 = D^{m+1} \times S^n$ の共通の境界として，直積 $S^m \times S^n$ を含み，球面 S^{m+n+1} はこれらを縫い合わせて得られる（こ

こに D^{m+1} と D^{n+1} は対応する次元の円板). $m=0, n=1$ および $m=1, n=1$ の特別な場合である球面 S^2 と S^3 の2つの輪環体への分割は次の絵で示される：



輪環体 Π_1 と Π_2 は，次のようにして球面 S^{m+n+1} に縫い合わせられる：自然な同相写像

$$\varphi : D^{m+1}\times D^{n+1}\to D^{m+n+2}$$

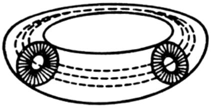
の境界への制限

$$\varphi' : \partial(D^{m+1}\times D^{n+1})\to\partial D^{m+n+2}$$

を考え，次の写像

$$\varphi' : (S^m\times D^{n+1})\cup(D^{m+1}\times S^n)\to S^{m+n+1}$$

を得る．これは，2つの輪環体 Π_1 と Π_2 の和集合としての球面 S^{m+n+1} の分割を与える．いずれの輪環体 Π_1 と Π_2 も $(S^m\times S^n)\times I/R_i$ という形である．ただし，p_0 と q_0 をそれぞれ S^m と S^n の基点とするとき，同値関係 R_i $(i=1, 2)$ は，柱の上面の点 $(p, q, 1)$ はそれぞれ（$i=1$ については）$(p, q_0, 1)$ と（$i=2$ については）$(p_0, q, 1)$ と同一視するものである．



上の考察から，写像

$$S^{m+n+1}=\Pi_1\bigcup_e \Pi_2\to S^m\times C(S^n)\bigcup_e C(S^m)\times S^n$$

の存在がわかる．ただし，e は恒等写像であり，C は錐を表わす．この写像を構成するには，2つの球面 S^m と S^n をそれぞれ輪環体 Π_1 と Π_2 の「軸」とみなし，他方をその中で1点に縮めなければならない．さて $f: S^m\times S^n\to S^n$ はすでに与えられているから，写像 $H(f): S^{m+n+1}\to S^{n+1}=\Sigma S^n$ は自然な方法により，すなわち，$H(f)$ は以下のように簡単な公式により構成される．ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{m+n+2}$ の任意のベクトル x は $(p,q), p\in\boldsymbol{R}^{m+1}, q\in\boldsymbol{R}^{n+1}$，という形で与えられる．$|p|^2+|q|^2=1$ を満たすベクトル (p,q) は球面 S^{m+n+1} に属し，一意的に $p'\cos\varphi+q'\sin\varphi$，ただし $p'\in S^m, q'\in S^n$，と表わされ，$(p,0)$, $|p|=1$ および $(0,q)$, $|q|=1$ はそれぞれ球面 S^m と S^n に行きわたる．さて，f が $S^m\times S^n$ を S^n に写すとき，$H(f)$ は次式で与えられる：

$$[H(f)(p,q)]_i=\sin 2\varphi\cdot f_i(p',q'),\quad |p|\cdot|q|\neq 0\ \ (i=1,2,\cdots,n+1) \text{ のとき}$$

$$H(f)(0,q)=H(f)(p,0)=0,$$

$$[H(f)(p,q)]_{n+2}=\cos 2\varphi,$$

ただし，$(p,q)=p'\cos\varphi+q'\sin\varphi$ である．ここで，添字 i はベクトル

$$H(f)(p,q)\in S^{n+1}\subset\boldsymbol{R}^{n+2}$$

の対応する座標を示し，p' と q' は (p,q) のそれぞれ $\boldsymbol{R}^{m+1}$ と $\boldsymbol{R}^{n+1}$ への射影であり，$\sin 2\varphi=2|p|\cdot|q|, \cos 2\varphi=|q|^2-|p|^2$ である．この記号の下で，輪環体 Π_1 と Π_2 の境界，すなわち，$S^m\times S^n$ は，方程式 $|p|=|q|$, $(p,q)\in S^{m+n+1}$，をもち，一方，輪環体 Π_1 と Π_2 はそれぞれ不等式 $|p|\geq|q|$ と $|p|\leq|q|$ で与えられる．

さて，特殊直交群 $SO(n+1)$ を考える．$[g]\in\pi_m(SO(n+1))$ とし，$g: S^m\to SO(n+1)$ は対応する球写像とするとき，直積 $S^m\times S^n$ 上で連続写像を $g^*: S^m\times S^n\to S^n \Leftrightarrow g^*(p',q')=[g(p')](q')$ により与える．ただし，$p'\in S^m$, $q'\in S^n, g(S^m)\subset SO(n+1)$ である．このとき g をホモトープな $\tilde{g}$ で置き換えると，$H(g^*)$ はホモトープな $H(\tilde{g}^*)$ で置き換えられるから，結局，このように g

に写像 $H(g^*): S^{m+n+1} \to S^{n+1}$ を対応させる対応 $g \longmapsto H(g^*)$ は $H: \pi_m(SO(n+1)) \to \pi_{m+n+1}(S^{n+1})$ を与える．次の定理の証明は読者に任せる．

定理　写像 $H: \pi_m(SO(n+1)) \to \pi_{m+n+1}(S^{n+1})$ は群の準同型である．

準同型 $H_{m,n}: \pi_m(SO(n+1)) \to \pi_{m+n+1}(S^{n+1})$ は，$m=1, n>1$ または $m=2$, $n>1$ ならば同型であることを示すことができる．$n>1$ のとき $\pi_1(SO(n+1)) \cong \boldsymbol{Z}_2$ かつ $\pi_{n+2}(S^{n+1}) \cong \boldsymbol{Z}_2$ であることはよく知られている．

十分大きい n について，準同型 $H_{m,n}$ は安定ホモトピー群の間の準同型

$$\pi_m^S(SO) \to \pi_m^S(S^0)$$

であり，これは **J-準同型**とよばれる．

J-準同型のもう1つの定義は以下の通りである．任意の変換 $g \in SO(n)$ は，連続写像 $g: S^{n-1} \to S^{n-1}$ とみなすことができるから，このとき，球面 S^{n-1} から S^{n-1} へのすべての写像の集合 $\mathrm{Map}(S^{n-1}, S^{n-1})$ への $SO(n)$ の埋込み $SO(n) \xrightarrow{i} \mathrm{Map}(S^{n-1}, S^{n-1})$ を得る．任意の写像 $\alpha: S^{n-1} \to S^{n-1}$ は，球面 $S^n = \Sigma S^{n-1}$ の基点 x_0（例えば，北極）を保つ写像 $\Sigma\alpha: \Sigma S^{n-1} \to \Sigma S^{n-1}$ を一意的に定義する．したがって，次の埋込みを得る：

$$\mathrm{Map}(S^{n-1}, S^{n-1}) \xrightarrow{j} \mathrm{Map}_*(S^n, S^n)$$

ただし，$\mathrm{Map}_*(S^n, S^n)$ は，S^n から S^n への基点を保つ写像の空間，すなわち，自然な同相写像 $\Omega^n(X) \approx \mathrm{Map}_*(S^n, X)$ により，n 重ループ空間 $\Omega^n(S^n)$ である．ここに $\mathrm{Map}_*(S^n, X)$ は，任意の X に対して，S^n の基点を X の基点に写す球面 S^n から空間 X への写像の空間を表わす．

このように，埋込みの系列

$$SO(n) \xrightarrow{i} \mathrm{Map}(S^{n-1}, S^{n-1}) \xrightarrow{j} \mathrm{Map}_*(S^n, S^n) \approx \Omega^n(S^n)$$

があり，これは次のホモトピー群の準同型の系列を誘導する：

$$\pi_m(SO(n)) \to \pi_m(\Omega^n(S^n)) \cong \pi_{m+n}(S^n) = \pi_{m+n}(\Sigma^n S^0)$$

したがって，十分大きい n について，**J-準同型**とよばれる安定ホモトピー群の間の準同型 $J: \pi_m(SO) \to \pi_m^S(S^0)$ を得る．

演習　2つの定義が同値であることを証明せよ．

無限直交群 $SO = \lim_{n\to\infty} SO(n)$ の安定ホモトピー群 $\pi_m(SO)$ はよく知られている．これらは周期的で周期8をもち（**直交 Bott 周期性**），次の形である：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	0	$\boldsymbol{Z}$	0	0	0	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$

次の定理は Adams に依るものである．

定理 1　自然数 $m\equiv 0 \pmod 8$（この場合 $\pi_m(SO)\cong \boldsymbol{Z}_2$）について J-準同型は単射であり，その像は群 $\pi_m^S(S^0)$ の直和因子である．

「安定」J-準同型の像を計算するために Adams が考案した方法により，自然数 $m\equiv 1$ または $\equiv 2 \pmod 8$ について，群 $\pi_m^S(S^0)$ は位数 2 の元 μ_m を含んでいるのを示すことができる．（例えば，$\mu_1=\eta, \mu_2=\eta^2$ である．ただし，$\eta\in \pi_1^S(S^0)\cong \boldsymbol{Z}_2$ は $\pi_{n+1}(S^n), n>2$, の生成元に対応し，η^2 は環 $\pi_*^S(S^0)$ における合成積の意味で考えている．）

元 $\{\mu_m, m\geq 1\}$ は，球面の安定ホモトピー群の元の中で，特別な集合として一連の興味ある性質により特徴づけられる．

定理 2　自然数 $m\equiv 2 \pmod 8$ について，群 $\pi_m^S(S^0)$ は μ_m により生成される直和因子 $\boldsymbol{Z}_2$ を含む．

定理 3　$m\equiv 1 \pmod 8$ かつ $m>1$ について，J-準同型は単射であり，群 $\pi_m^S(S^0)$ は直和因子 $\boldsymbol{Z}_2\oplus\boldsymbol{Z}_2$ を含み，最初の因子は μ_m により生成され，第 2 の因子は $\operatorname{Im} J$ である．

さらに Adams の定理の定式化に移る前に，Bernoulli 数を定義する．

定義　次の展開式により与えられる有理数 B_s ($s\geq 1$) は **Bernoulli 数**とよばれる：

$$\frac{t}{e^t-1}=1-\frac{t}{2}+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\frac{B_s}{(2s)!}t^{2s}$$

例えば，最初の 12 個の Bernoulli 数は次の通りである：

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_2=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66},$$

$$B_6=\frac{691}{2730},\quad B_7=\frac{7}{6},\quad B_8=\frac{3617}{510},\quad B_9=\frac{43867}{798},$$

$$B_{10}=\frac{174611}{330},\quad B_{11}=\frac{854513}{138},\quad B_{12}=\frac{236364091}{2730}$$

定理 4　$m=4s-1\equiv 3 \pmod 8$（この場合 $\pi_m^S(SO)\cong \boldsymbol{Z}$）について，$J$-準同型の像は位数 $\tau(2s)$ の巡回群であり，これは $\pi_m^S(S^0)$ の直和因子である．ただし，B_s は s 次 Bernoulli 数，$\tau(2s)$ は $B_s/4s$ という形の既約分数の分母である．



定理 5　$m=4s-1\equiv 7 \pmod 8$（この場合 $\pi_m^S(SO)\cong \boldsymbol{Z}$）について，$J$-準同型の像は位数 $\tau(2s)$ または $2\tau(2s)$ の巡回群である．さらに準同型 $\omega:\pi_m^S(S^0)\to \boldsymbol{Z}_{\tau(2s)}$ が存在して，$\omega\circ J:\pi_m^S(SO)\to \boldsymbol{Z}_{\tau(2s)}$ は全射である．したがって，もし Im J の位数が $\tau(2s)$ に等しいならば，その像は $\pi_m^S(S^0)$ の直和因子である．（例えば，このような場合は，$m=7, m=15$ である．）

論文 M. Mahowald : On the order of the image of J, Topology, 6(1967), 371–378 に示されているように，これは，すべての $r=2^s-1$ について成り立つ．

球面のホモトピー群　$\pi_{n+k}(S^n)$

$k \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$>k+1$
0	$\boldsymbol{Z}$	…	…	…	…	…	…	…	…	$\boldsymbol{Z}$
1	$\boldsymbol{Z}$	$\boldsymbol{Z}_2$	…	…	…	…	…	…	…	$\boldsymbol{Z}_2$
2	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	…	…	…	…	…	…	$\boldsymbol{Z}_2$
3	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_{12}$	$\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}_{12}$	$\boldsymbol{Z}_{24}$	…	…	…	…	…	$\boldsymbol{Z}_{24}$
4	$\boldsymbol{Z}_{12}$	$\boldsymbol{Z}_2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$\boldsymbol{Z}_2$	0	…	…	…	…	0
5	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}$	0	…	…	…	0
6	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_3$	$\boldsymbol{Z}_{24}\oplus\boldsymbol{Z}_3$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	…	…	$\boldsymbol{Z}_2$
7	$\boldsymbol{Z}_3$	$\boldsymbol{Z}_{15}$	$\boldsymbol{Z}_{15}$	$\boldsymbol{Z}_{30}$	$\boldsymbol{Z}_{60}$	$\boldsymbol{Z}_{120}$	$\boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z}_{120}$	$\boldsymbol{Z}_{240}$	…	$\boldsymbol{Z}_{240}$
8	$\boldsymbol{Z}_{15}$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_{24}\oplus\boldsymbol{Z}_2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^3$	$(\boldsymbol{Z}_2)^4$	$(\boldsymbol{Z}_2)^3$	$(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^2$
9	$\boldsymbol{Z}_2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^3$	$(\boldsymbol{Z}_2)^3$	$(\boldsymbol{Z}_2)^3$	$(\boldsymbol{Z}_2)^4$	$(\boldsymbol{Z}_2)^5$	$(\boldsymbol{Z}_2)^4$	$\boldsymbol{Z}\oplus(\boldsymbol{Z}_2)^3$	$(\boldsymbol{Z}_2)^3$

球面の安定ホモトピー群

k	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\pi_k^S(S^0)$	$\boldsymbol{Z}_6$	$\boldsymbol{Z}_{504}$	0	$\boldsymbol{Z}_3$	$(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$\boldsymbol{Z}_{480}\oplus\boldsymbol{Z}_2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^4$	$\boldsymbol{Z}_8\oplus\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_{264}\oplus\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_{24}$

k	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\pi_k^S(S^0)$	$(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$\boldsymbol{Z}_{65520}\oplus\boldsymbol{Z}_{24}\oplus\boldsymbol{Z}_2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$\boldsymbol{Z}_6\oplus\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_{24}$	$\boldsymbol{Z}_2$	$\boldsymbol{Z}_3$	$\boldsymbol{Z}_6$

k	31	32	33	34	35	36	37
$\pi_k^S(S^0)$	$\boldsymbol{Z}_{16320}\oplus(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$(\boldsymbol{Z}_2)^4$	$(\boldsymbol{Z}_2)^5$	$\boldsymbol{Z}_4\oplus(\boldsymbol{Z}_2)^3$	$\boldsymbol{Z}_{28728}\oplus(\boldsymbol{Z}_2)^2$	$\boldsymbol{Z}_6$	$\boldsymbol{Z}_6\oplus(\boldsymbol{Z}_2)^2$

挿絵について

本書の各所に散見される挿絵は，具体的に位相幾何学的な構造に基づいているか，またはある定理の図式的な表現であるか，時には，本書の内容の根底にある着想(アイディア)の特別な群の雰囲気とか色彩を反映している．それのみならず，いくつかの挿絵はスペクトル系列や最初の 2 章に解説されている一般的なホモトピー論やホモロジー論の部分に関連していない，それ以上の情報を含んでいる．本書の最初にある挿絵は Alexander の「角のある球面」，すなわち，ある点で局所的に平坦ではなく，単連結でない領域に $\boldsymbol{R}^3$ を分割する埋込み $S^2\subset\boldsymbol{R}^3$ の例を表わしている．この球面を構成する最初の段階は 5 ページの挿絵に示されている． 16 ページと 18 ページの挿絵の基本的な要素は第 1 章で詳しく論じられている．28 ページの挿絵は（端点の各開近傍は自明でないホモロジー群をもつから），次元 1 において（Czech の意味で）局所的にはホモロジー的に連結でない局所コンパクトな Hausdorff 空間を表わしている．この空間の構成要素への分割は 61 ページの挿絵に示されており，これはまたソレノイド（構成の最初の段階），Antoin のネックレス（構成の最初の段階）と Adams の例を含んでいる．輪環面 T^2 の族の共通集合として得られたこのネックレスは，完全不連結，コンパクト，完全な距離空間であり，したがって Cantor 集合に同相である．その補集合は単連結ではない． Adams の例は Möbius の帯と円柱座標で次式により与えられる「三重 Möbius の帯」との連結和をとって得られる：$r=1+\varepsilon t\cos u, \theta=3u, z=\varepsilon t\sin u, \varepsilon=$定数, $0\leq t\leq 1, 0\leq u\leq 2\pi$．この結果は，$t=0$ において 3 葉が角度 $2\pi/3$ で交わる特異線があるので，多様体ではない複体 X である． この複体の境界は円 S^1 であるが， Hopf の拡張定理から容易にわかるように， これは空間 X のレトラクトである． この例は極小曲面の理論の重要な実例になっている． すなわち，S^1 は係数群が $\boldsymbol{Z}_2$ の場合の境界であり，群 $U=S^1$ の場合は境界ではない． この他， 同じ挿絵の右のほうの回廊に輪環面 T^2 が $\boldsymbol{R}^3$ の内部で裏返しにされている所が見える．

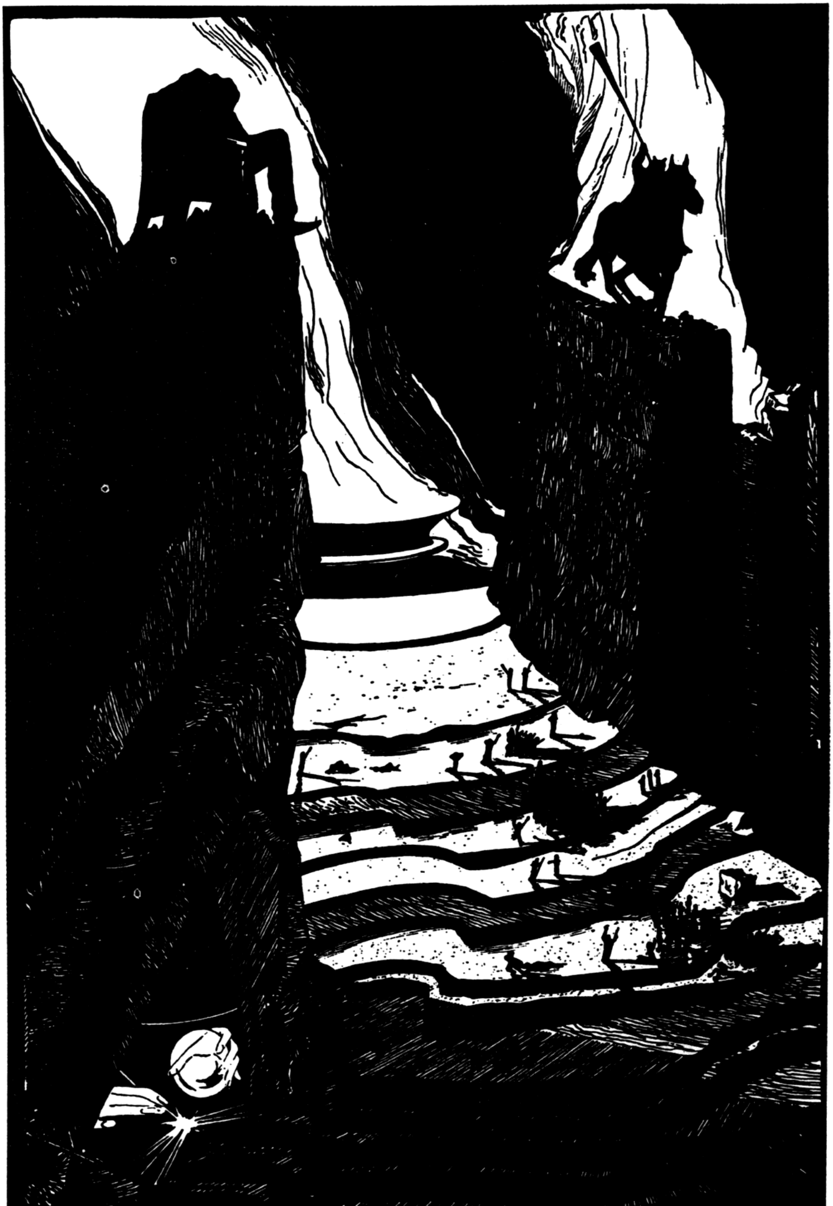
53 ページの挿絵は Serre のファイバー空間の被覆ホモトピー性質の実例とみ

なしてよい．67 ページの挿絵は $\dim P+\dim Q<n-1$ のときの複体 P と Q の unlinking に関する定理である．この unlinking の操作は 71 ページの挿絵にも示されている．78 ページの挿絵は 球面 S^2 を $\boldsymbol{R}^3$ において裏返す過程を時刻 $t=1/2$ でとらえたものに当てはまり，その後は操作を逆の順序に繰り返せばよい．

80 ページの挿絵は，球面 S^3 の輪環体の対への分割に基づいている．この分割の方法は (Hopf ファイバー空間 $S^3 \to S^2$ と共に) 60 ページに示されている．この方法の詳しい説明は付録 4 (327 ページ) にも与えられている．高次元ホモトピーへの左作用素の群としての基本群の作用は 88 ページと 121 ページの挿絵の動機(モチーフ)になっている．133 ページの挿絵は Bott 周期性の直交群版に当てられている．すなわち，平らになった身体は群 $SO(16m)$ であり，n が変わると共に両側に分かれる四元数 Grassmann 多様体 $G^H_{4m,2m}$ (白い肋骨) をよく見分けることができる．また，中央には，$4\leq k\leq 8$ における Bott 周期性に含まれる残りのループ空間を含む最大次元の成分 $G^H_{4m,2m}$ が見える．

本書の後半にあるすべての挿絵は Adams スペクトル系列の言葉で解釈できる．特にスペクトル系列の E_2 項に関係する元は最も頻繁に用いられている．例えば 261 ページの挿絵は Adams と Serre の消去(キリング)法の差を説明している．長い棚の投影は次数を表わし，次数の元はすでに消去され，はるか向こうにはすでに「消去された」コホモロジー環が見える．

35 ページには，英国の遺伝学者 L.S. Penrose と息子の Roger Penrose による論文 “Impossible object, A special form of optical illusion”, British Journal of Psychology, February, 1958 に文献上初めて現われた「巻きすぎた 3 角形」を見ることができ，この図形は経線に沿って 3 度回り，平行線に沿って 4 度回る $4a+3b$ 型の軌線をもつ輪環面 T^2 である．49 ページにはこのような 2 つの 3 角形を合わせた形がある．



参考文献

Seifert, H., Threllfall, W.: Lehrbuch in Topologie, Teubner, Leipzig-Berlin, 1934

Morse, M.: The Calculus of Variations in the Large, AMS Colloq. Publ. Vol. 18, Providence, 1934

Alexandroff, P., Hopf, H.: Topologie, Springer-Verlag, 1935

Seifert, H., Threllfall, W.: Variationsrechnung im Großen, 1938

Pontryagin, L. S.: Topological Groups (in Russian), Moscow, 1938; Engl. Transl. Princeton, 1939; Second Russian Ed., Moscow, 1954; Engl. Transl. by Gordon-Breach, 1966

Hurewicz, W., Wallman, H.: Dimension Theory, Princeton Math. Ser., Vol. 4, 1941

Lefschetz, S.: Algebraic topology, AMS Colloq. Publ. Vol. 27, New York, 1942

Steenrod, N.: The Topology of Fibre Bundles, Princeton Math. Ser., Vol. 14, 1951

Eilenberg, S., Steenrod, N.: Foundations of Algebraic Topology, Princeton, 1952

Hilton, P. J.: An Introduction to Homotopy Theory, Cambridge, 1953

Rham, G. de: Variétés différentiables, Hermann, Paris, 1955

Pontryagin, L. S.: Smooth Manifolds and their Applications in Homotopy Theory (in Russian), Moscow, 1955; Engl. Transl. by Amer. Math. Soc., 1959

Cartan, H., Eilenberg, S.: Homological Algebra, Princeton, 1956

Hirzebruch, F.: Neue Topologische Methoden in der Algebraische Geometrie, Springer-Verlag, 1956. A revised and extended English version: Springer-Verlag, 1966

Wallace, A. H.: An Introduction to Algebraic Topology, Pergamon Press, New York-London-Paris, 1957

Whitney, H.: Geometric Integration Theory, Princeton, 1957

Whyburn, G. T.: Topological Analysis, Princeton Math. Studies, Vol. 23, 1958; A revised edition, 1964

Godement, R.: Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Act. Sci. Ind. No. 1252, Hermann, Paris, 1958

Hu, S. T.: Homotopy Theory, Acad. Press, New York–London, 1959

Chern, S. S.: Complex Manifolds, Textes de Mat., Univ. do Recite, 1959

Borel, A.: Seminar on Transformation Groups, Princeton, 1960

Hilton, P.J., Wylie, S.: Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology, Cambridge Univ. Press, New York, 1960

Toda, H.: Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres, Princeton, 1962

Lang, S.: Introduction to Differential Manifolds, Interscience Publ., New York–London, 1962

Steenrod, N., Epstein, D. B. A.: Cohomology Operations, Princeton, 1962

Milnor, J. W.: Morse Theory, Princeton, 1963

Munkres, J.: Elementary Topology, Princeton, 1963; A revised version, 1966

Crowell, R. H., Fox, R. H.: Introduction to Knot Theory, Grinn and Co., Boston, 1963

MacLane, S.: Homology, Springer–Verlag, 1963

Conner, P. E., Floyd, E. E.: Differential Periodic Maps, Springer–Verlag, 1964

Bishop, R. L., Crittenden, R. J.: Geometry of Manifolds, Acad. Press, New York, 1964

Atiyah, M. F.: K-theory, Harvard Univ. Press, 1965

Milnor, J. W.: Lectures on the *h*-cobordism Theorem, Princeton, 1965

Milnor, J. W.: Topology from the Differentiable Viewpoint, The University Press of Virginia, 1965

Hu, S. T.: Theory of Retracts, Wayne St. Univ. Press, 1965

Palais, R. *D.:* Seminar on the Atiyah–Singer Index Theorem, Princeton, 1965

Adams, J. F.: Stable Homotopy Theory, Lect. Notes in math., 3, Springer–Verlag, 1966

Spanier, E.: Algebraic Topology, McGraw-Hill Comp. New York et al. 1966

Husemoller, D.: Fibre Bundles, McGraw-Hill Comp. New York et al. 1966

Rham, G. de, Maumary, S., Kervaire, M. A.: Torsion et type simple d'homotopie, Lect. Notes in math., 48, Springer–Verlag, 1967

Mosher, R. E., Tangora, M. C.: Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory, Harper and Row, New York–Evanston–London, 1968

Adams, J. F.: Lectures on Lie groups, Benjamin, New York–Amsterdam, 1969

Whitehead, G. W.: Recent Advances in Homotopy Theory, Providence, 1970

Bredon, G.: Introduction to Compact Transformation Groups, Acad. Press, New York–London, 1972

Dold, A.: Lectures on Algebraic Topology, Springer–Verlag, 1972

Boardman, J. M., Vogt, R. M.: Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces, Lect. Notes in math., 347, Springer–Verlag, 1973

Milnor, J. W., Stasheff, J. D.: Characteristic Classes, Princeton, 1974

Hirsch, M.: Differential Topology, Springer–Verlag, 1976

Rokhlin, V. A., Fuchs, D. B.: Introductory Course in Topology (in Russian), Moscow, 1977; English transl. Springer–Verlag, 1984

Adams, J. F.: Infinite Loop Spaces, Princeton, 1978

Massey, W. S.: Homology and Cohomology Theory, Marcel Decker, New York, 1978

Karoubi, M.: K-theory, An Introduction, Springer–Verlag, 1978

Dieck, T.: Transformation Groups and Representation Theory, Lect. Notes in math., 766, Springer–Verlag, 1979

Dubrovin, B. A., Novikov, S. P., Fomenko, A. T.: Contemporary Geometry (in Russian), Moscow, 1979; Engl. transl. by Springer–Verlag is in prep.

Fomenko, A. T.: Variational Method in Topology (in Russian), Moscow, 1982

Dubrovin, B. A., Novikov, S. P., Fomenko, A. T.: Contemporary Geometry. Methods of Homology Theory (in Russian), Moscow, 1984

Postnikov, M. M.: Lectures on Algebraic Topology (in Russian), Moscow, 1985

訳者あとがき

本書は，A.T. Fomenko—D.B. Fuchs—V.L. Gutenmacher : ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ の K. Mályusz による英訳 Homotopic Topology の邦訳というなんともややこしいものである．

10年あまり前，友人の A. Kozlowski 氏より，おもしろい本があるといって見せられたのがこのロシア語の原著であった．早速，安藤　豊氏，Kozlowski 氏をも込めた3人でロシア語からの邦訳を考えて，二，三の出版社にあたったのであるが，残念ながら不調に終わってしまった．そうこうしている中に，ハンガリーの出版社から出版されたのが Mályusz による英訳 Homotopic Topology である．その時点で，邦訳を諦めてしまったのであるが，さて，この英訳書を読んでみて驚いたのは，異訳，誤訳，校正ミス，脱落などの多いことである．なかには全然意味不明の所もある．これらを修正して，読みやすくするのも意義のある仕事ではないかと思い，英訳からの邦訳を再考することにした．幸い，安藤　豊氏のご尽力で，共立出版㈱が邦訳を引き受けてくれることになった．しかし，時間的な制約もあり，一人で邦訳を行なうことにした次第である．

邦訳にあたっては，読みやすくするのを主眼としたため，適当に定義などを付け加え，本文中の主張などを演習に回したり，定理の表現の変更，またこの証明をわかりやすくするために，ロシア語の原著を参照しながら，変更したり，場所を変えたりした所もある．また，各章でバラバラであった記号を統一し，さらに記号は（西欧側で）通常用いられているものに変更もしている．そういう意味で英語からの忠実な翻訳という枠からはみだしたものになっているかもしれないが，それにより日本の読者に幾分でも読みやすいものになっているとすれば訳者の望外の喜びである．それでもなお，読みづらい所，意味不明の所があれば，それは訳者の浅学のためである．読者のご寛容を願う次第である．

最後になったが，第Ⅰ章の邦訳では安藤氏より，また全般にわたって岩瀬則夫氏よりいろいろ助言をいただいた．また，意味不明の所はロシア語の原著を検討することにしたが，これは Kozlowski 氏のご助力に負うところが多い．原稿の整理にあたっては大島知子氏のお世話になった．出版にあたっては共立出版(株)の坂野一寿氏が終始ご努力してくださった．これらの方々に心から感謝の意を表したい．

平成元年四月　洛北にて

三村　護

索　引

【ア】

【イ】

【ウ，エ】

【カ】

【キ】

【フ】

【へ】

【ホ】

【マ】

【ミ】

【ム】

【メ，モ】

【ユ】

【リ】

【ル】

【レ】

【ワ】

人名索引

訳編者略歴

みむら　まもる
三　村　　護

1960年　京都大学理学部数学科卒業
1962年　京都大学大学院理学研究科数学専攻修士課程修了
1963年　同博士課程中退
1963年　京都大学理学部助手
1967年　京都大学教養部助教授
現　在　岡山大学理学部教授（理学博士）

著書・訳書

ホモトピー論（共著，紀伊國屋書店，1975）
数学＝創造された宇宙（上・下）（共訳，紀伊國屋書店，1977）
リー群の位相（上・下）（共著，紀伊國屋書店，1978，1979）
線型代数 演習と解法（現代数学社，1980）
微分積分 演習と解法（現代数学社，1980）
不確実性の数学（上・下）（共訳，紀伊國屋書店，1984）
現代数理科学入門（共著，共立出版，1985）
やさしい線形代数（共著，内田老鶴圃，1985）
ホップ空間（紀伊國屋書店，1986）
数学人群像（共訳，近代科学社，1987）
数学点描（訳，近代科学社，1989）

ホモトピー論
幻想の世界から位相幾何学へ

検印廃止

NDC 415.7

1989年6月25日　初版1刷発行
1990年10月1日　初版2刷発行

訳編者　三　村　　護
発行者　南　條　正　男
東京都文京区小日向4丁目6番19号
印刷者　小　林　　剛
東京都新宿区水道町4番24号

発行所　東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話　東京 947 局 2511 番（代表）
郵便番号112 振替 東京 1-57035 番
共立出版株式会社

印刷・啓文堂　製本・中條製本　Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会員

ISBN4-320-01420-0